



N° d'ordre : 05/2005-M / PH

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
U S T H B / ALGER

FACULTE DE PHYSIQUE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

En ; Physique

Spécialité : Physique Théorique

Par

DAIFFALLAH Khalil

SUJET

**ETUDE DES ONDES MAGNETO-ATMOSPHERIQUES :
INTERACTION DES OSCILLATIONS « FAST » ET
« SLOW »**

Soutenu publiquement le : 16 / 02 / 2005, devant le jury composé de :

Mr S. OUICHAOUI
Mr T. ABDELATIF
Mme F. CHAFA
Mr R. ANNOU
Mr A. MEZAOU

Professeur (USTHB)
Directeur de recherche (CRAAG)
Maître de conférence (USTHB)
Maître de conférence (USTHB)
Chargé de cours (USTHB)

Président
Directeur de thèse
Examineur
Examineur
Examineur

Table des matières

1 Introduction générale	4
1.1 Introduction Générale.	5
1.1.1 Introduction.	5
1.1.2 Présentation générale du Soleil.	5
1.2 Structure interne du Soleil.	6
1.2.1 Le noyau.	7
1.2.2 Zone radiative.	7
1.2.3 Zone de convection.	7
1.3 L'atmosphère solaire.	7
1.3.1 La Photosphère.	8
1.3.2 La Chromosphère.	8
1.3.3 La zone de transition.	8
1.3.4 La Couronne.	8
1.3.5 Le vent solaire.	8
1.4 Activité solaire.	9
1.4.1 Les taches solaires.	10
1.4.2 Les facules.	13
1.4.3 Les éruptions Solaires (<i>flares</i>).	13
1.4.4 Les protubérances (<i>prominences</i>).	14
1.4.5 Boucles magnétiques.	14
1.5 Rotation du Soleil.	14
1.6 Oscillations du Soleil.	15
1.7 Les travaux effectués sur les oscillations dans une atmosphère stratifiée et magnétique.	17
1.7.1 Champ magnétique horizontal.	17
1.7.2 Champ magnétique vertical.	18

2	Rappel théorique et équations de base	21
2.1	Introduction.	22
2.2	Magnétohydrodynamique (MHD)	22
2.2.1	Force de Lorentz.	24
2.2.2	Equilibre MHD et taches solaires.	25
2.3	Les Ondes MHD.	27
2.4	Les ondes MAG : Magnéto - Acoustique – Gravité.	30
2.5	Ondes Magnéto - Acoustiques.	32
2.5.1	Propagation des ondes Magnéto – Acoustique.	33
2.5.2	Relation de dispersion des ondes Magnéto - Acoustique <i>fast</i> et <i>slow</i>	35
2.6	Conclusion.	45
3	Ondes Magnéto Atmosphériques dans une atmosphère polytrophe	47
3.1	Introduction.	48
3.2	Le modèle.	50
3.3	Etude sommaire des solutions.	55
3.4	Relation de Dispersion d'un polytrophe non magnétique.	57
3.5	Comparaison entre une atmosphère isotherme non magnétique et une atmosphère polytrophe non magnétique.	62
3.6	Résultats et discussion	65
3.7	Conclusion.	66

4 Ondes Magnéto Atmosphériques dans une atmosphère magnétique	67
4.1 Introduction.	68
4.2 Le modèle.	70
4.3 Les conditions aux limites.	70
4.4 Etude des solutions.	72
4.4.1 Les solutions à $\zeta = 0$	72
4.4.2 Les solutions asymptotiques pour $\zeta \rightarrow \infty$	77
4.5 Discussions et considérations physiques.	85
4.6 Algorithme de résolution numérique et Relation de dispersion.	88
4.6.1 Résolution numérique de la fonction du déterminant.	90
4.7 Résultats et discussion.	92
4.8 Conclusion	105
Conclusion générale et perspectives	106
Apport et contribution	109
Appendices	110
1 Equations MAG et changement de variable.	111
2 2.1 Le calcul des coefficients des séries ϕ et Ψ pour $\zeta = 0$	114
2.2 Le calcul des coefficients des séries U_S, V_S et U_π, V_π associés aux solutions ϕ_S, Ψ_S et ϕ_π, Ψ_π respectivement pour $\zeta \rightarrow \infty$	117
3 Résolution numérique du système d'équations différentielles par la méthode RK44 d'ordre 4.	120
4 Sommation et convergence des séries.	123
Bibliographie	124

1.1-Introduction Générale :

1.1.1-Introduction :

Le Soleil est notre étoile témoin, la seule qui soit étudiée de près, cela tient de sa proximité, huit minutes lumière, alors que la lumière met quatre ans à nous parvenir de l'étoile la plus proche de nous. Ceci a conduit à des avancées scientifiques importantes : vérification de la théorie de la relativité générale lors d'une éclipse solaire, la fusion nucléaire, la spectroscopie, physique des plasmas, ...

L'étude des ondes Magnéto-Atmosphériques nécessite une présentation générale du Soleil. Au début, nous allons exposer la structure interne et externe du Soleil, nous allons nous intéresser à la théorie de l'atmosphère solaire et toutes les simplifications très utiles qui en découlent. Une description générale des centres actifs et des phénomènes liés à l'activité magnétique sera faite, les caractéristiques des taches solaires, en particulier, seront largement décrites. Nous terminerons avec une étude globale des oscillations solaires et un survol de l'héliosismologie. Enfin, et pour situer notre travail, nous allons nous consacrer aux travaux qui ont été entrepris sur l'étude des ondes Magnéto-Atmosphériques.

1.1.2-Présentation générale du Soleil :

La mécanique céleste permet de connaître le rayon et la masse du Soleil, soient respectivement 696 000 km (109 rayons terrestre) et $1.99 \cdot 10^{33}$ kg (332 270 masses de la Terre). Le Soleil se trouve à une distance moyenne de 149 millions de Km de la Terre. L'accélération de la pesanteur à la surface correspond à 27.9 fois l'accélération à la surface de la Terre. La température effective de la surface du Soleil, déterminée à l'aide de la *loi de Stefan-Boltzman*, est de 5800 K.

On peut déduire la composition chimique de l'atmosphère solaire à partir d'une étude spectrale des raies d'absorption, mais aussi à partir du modèle de l'étoile. D'une façon générale, on peut dire que le Soleil est constitué de 23 % d'hélium et de 75% d'hydrogène. Les éléments plus lourds ne figurent que pour 2 %, quantités pourtant essentielles à l'étude des propriétés physiques du milieu (température, densité, pression), et ce, à travers l'intensité des raies d'absorption, ainsi que leurs largeurs.

1.2-Structure interne du Soleil :

La structure interne d'une sphère de gaz comme le Soleil est déterminée par les facteurs suivants :

- 1- La pression gazeuse qui tendrait à un « gonflement » de l'astre et à une dissémination des gaz dans l'espace.
- 2- La pression de radiation, elle aussi tend à une expansion du Soleil, mais à degré moindre que la pression gazeuse.
- 3- La masse des couches de gaz pesant vers l'intérieur du Soleil, c'est une pression croissante dans un champ de gravitation.

Le Soleil étant en équilibre, les facteurs 1 et 2 d'une part, et 3 d'autre part, doivent se neutraliser. Pour chaque point à l'intérieur du Soleil, la formule élémentaire suivante doit être vérifiée :

$$\text{Force de Pression gazeuse (+ Force de pression de radiation)} = \text{Force de gravitation.}$$

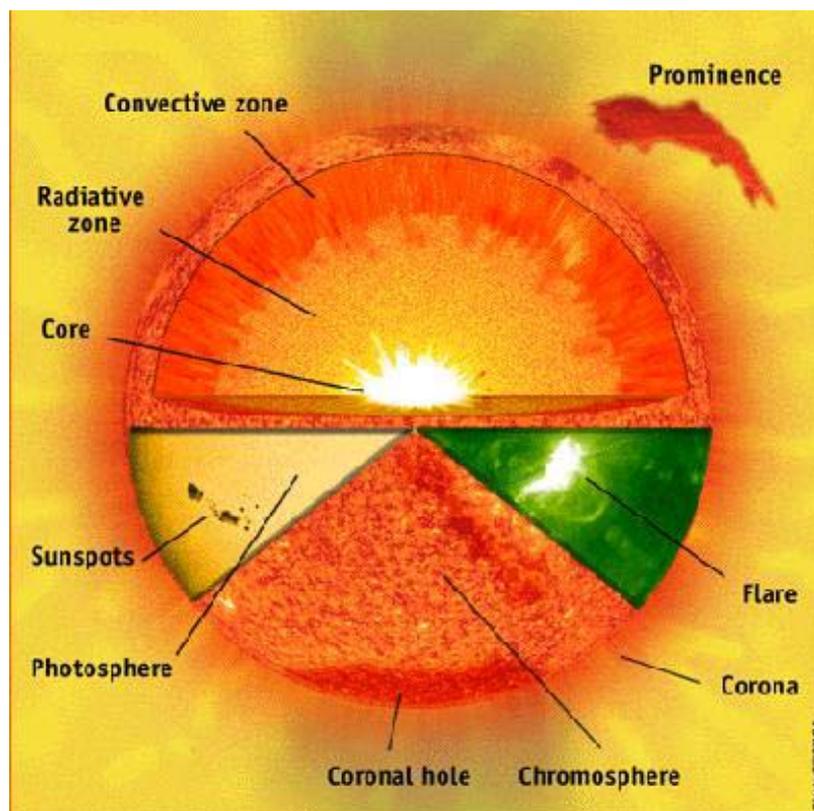


Figure 1.1 : Structure interne et externe du Soleil.

1.2.1-Le noyau :

Le centre du Soleil est occupé par un noyau au sein duquel la température s'élève à 15 millions de degrés, la pression jusqu'à 22100 milliards de pascals, et masse volumique 134g/cm^3 .

Dans ces conditions physiques extrêmes, aucune combinaison moléculaire n'existe et les atomes sont, pour une très grande partie, ionisés. C'est dans le noyau solaire qu'a essentiellement lieu la production d'énergie thermonucléaire qui résulte de la fusion nucléaire de l'hydrogène en hélium, principalement selon le cycle proton – proton ou le cycle de Bethe.

1.2.2-Zone radiative:

Le transfert d'énergie vers l'extérieur se fait, depuis la région du noyau, presque uniquement par rayonnement. Ce transfert radiatif se fait dans la zone radiative.

Bien que les photons voyagent à la vitesse de la lumière, ces derniers mettent parfois des millions d'années pour atteindre finalement la couche d'interface à travers la matière dense de la zone radiative.

1.2.3-Zone de convection :

Le transfert d'énergie par conduction ne se produit pas à l'intérieur du Soleil, par contre, la *convection*, c'est-à-dire le transfert d'énergie par des courants de fluide joue un rôle essentiel. Il existe ainsi une **zone convective** qui s'étend jusqu'à environ 130 000 km de profondeur.

À la base de la zone de convection, la température peut atteindre 2 millions de degré Celsius. Cette température est suffisamment "froide" pour permettre aux ions les plus lourds (tels que le carbone, l'azote, l'oxygène, le calcium, et le fer) de tenir certains de leurs électrons. Ceci rend la matière plus opaque de sorte qu'il soit difficile pour le rayonnement de passer à travers. Ceci emprisonne la chaleur qui rend le fluide instable et convectif, et finalement, ces mouvements de convection portent la chaleur plus rapidement à la surface.

1.3-L'atmosphère solaire :

L'atmosphère d'une étoile est définie comme étant l'ensemble des couches extérieures de l'astre qui contribuent au rayonnement reçu par l'observateur.

Le Soleil est l'étoile la plus proche de la Terre ; par conséquent, elle nous offre des possibilités incomparables d'observation en détail de ces couches extérieures transparentes aux rayonnements.

1.3.1-La Photosphère :

La zone de convection s'étend jusqu'à la photosphère, qui constitue la couche solaire que nous apercevons à l'œil nu, très fine couche, visible en lumière blanche et transparente au rayonnement. La surface de la photosphère présente une structure granulée, *les granulations photosphériques*. On atteint ainsi la limite supérieure de la zone de convection, et l'existence des granules apporte d'ailleurs un témoignage du transfert d'énergie par convection dans les couches solaires extérieures. Ce sont des cellules visibles au bord solaire et représentent la matière chaude qui émerge à partir de la couche de convection, leurs dimensions sont de l'ordre de 2000 Km, et d'une durée de vie moyenne de 10 minutes.

C'est dans la photosphère qu'apparaissent également les taches solaires et se forment aussi les raies spectrales.

1.3.2-La Chromosphère :

C'est une couche qui se situe à l'extérieur de la photosphère et visible à l'œil nu durant les éclipses Totales du Soleil sous forme d'une frange rosée, c'est une émission de la raie H_{α} . Cette couche se compose d'un gaz très raréfié, 1000 fois moins dense que la photosphère. L'analyse de la raie H_{α} de la Chromosphère montre des super granulations avec une dimension de l'ordre de 30000 Km.

1.3.3-La zone de transition :

C'est une couche très fine et très irrégulière de l'atmosphère solaire, le flux de chaleur qui provient de la couronne et passe à la chromosphère donne naissance à cette région où la température change brusquement et passe de un millions à 20 000°C quand la profondeur diminue. La lumière émise par la zone de transition est dominée par l'émission en ultraviolet des ions C IV, O IV, et Si IV.

1.3.4-La Couronne :

Région très chaude visible lors des éclipses totales du Soleil sous forme d'un halo lumineux, composée de gaz très raréfié (10^9 particules/cm³), présente des raies d'émission en visible et en rayons X. Les trous couronnaires sont des régions dans la couronne où le champ magnétique est relativement faible et ouvert.

1.3.5-Le vent solaire :

C'est l'ensemble des particules chargées émises par le Soleil, pouvant atteindre 800 km/s aux alentours de la Terre ; ce sont les trous couronnaires au niveau de la couronne qui permettent l'échappement du vent solaire.

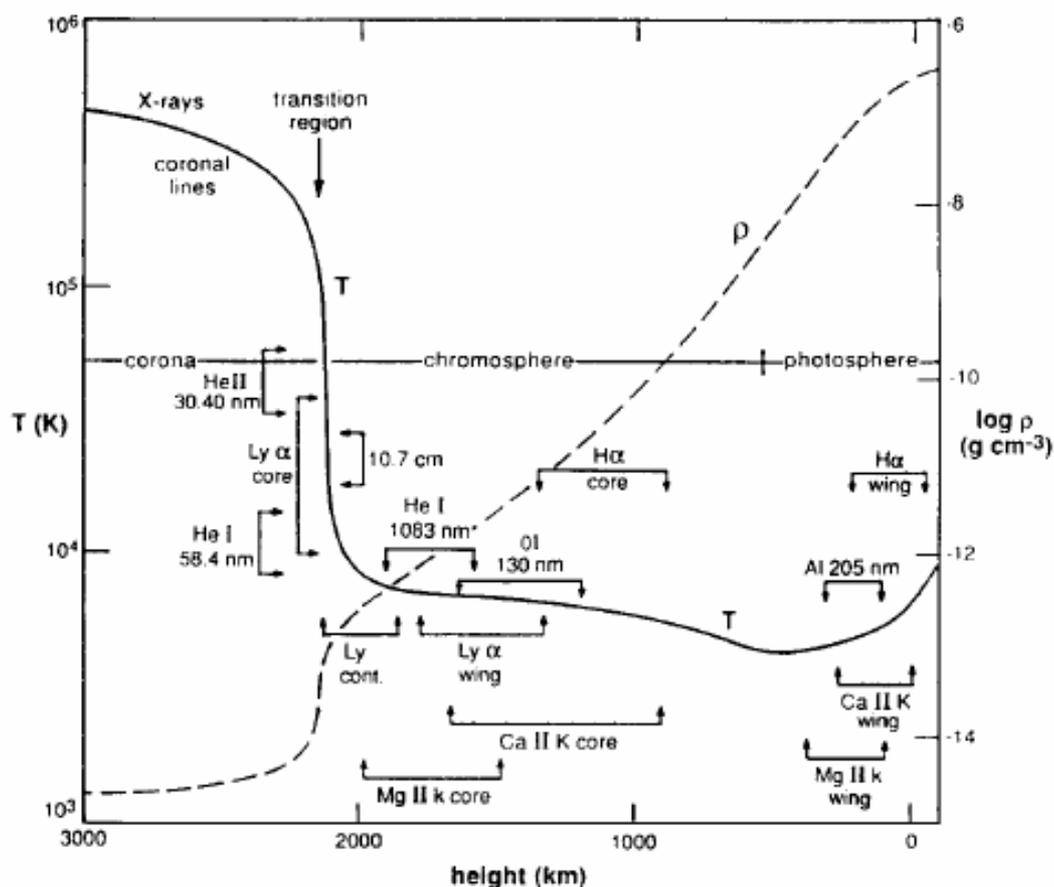


Figure 1.2: Variation de la densité et de la température le long de la couronne, la chromosphère et la photosphère ainsi que les principales raies d'absorptions à travers les différentes couches solaires (Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics)

1.4-Activité solaire :

L'écoulement des plasmas chauds à la surface ou à l'intérieur du soleil contribue d'une manière ou d'une autre à la production du champ magnétique du soleil. Ces mouvements du fluide peuvent tordre le champ magnétique préexistant de façon à produire des courants électriques. Ces courants induiront un champ magnétique secondaire qui, lui-même, est tordu par les mouvements. Ce dernier va produire de nouveaux courants électriques et ainsi de suite. Ce processus de dynamo exige une entrée d'énergie dont une partie est sous forme d'énergie cinétique de rotation, une autre partie est sous forme de mouvements de convection (zone convective). Le problème de la dynamo solaire consiste à démontrer la compatibilité entre ce processus à grande échelle et les observations du cycle solaire. L'ensemble des phénomènes liés au champ magnétique constitue ce que l'on appelle *l'activité solaire*.

1.4.1-Les taches solaires :

Taches sombres sur la surface solaire. L'examen spectroscopique (1908, George Ellery Hale, 1868-1938) des taches met en évidence un *effet Zeeman* et révèle ainsi l'existence de puissants champs magnétiques : les grands groupes de taches solaires présentent des intensités de champ allant jusqu'à 5000 G, alors que le champ magnétique moyen du Soleil est d'environ 1 G, et celui de la Terre est de l'ordre de 0.5 G. La partie centrale la plus sombre des taches solaires, connue sous le nom d'*ombre*, a un diamètre d'environ 0.4 fois le diamètre de la tache, soit près de 8000 km. La luminance de l'ombre ne dépasse pas, en lumière visible, 15% celle de la photosphère en dehors des taches. Cette réduction de l'émission lumineuse correspond à une réduction de température : l'écart de température entre la photosphère extérieure et l'ombre d'une tache atteint plus de 2000 K avec une température dans l'ombre de 3500 °K. L'ombre d'une tache n'est pas une région de luminance uniforme. Cependant, des images à grande résolution spatiale révèlent l'existence de points brillants sur fond sombre.

Ce refroidissement des taches solaires est expliqué aussi par le fait que le champ magnétique empêche les courants de convection de monter dans l'ombre des taches, ainsi, la matière chaude des couches profondes s'élève moins haut dans l'ombre qu'à l'extérieur. Le chauffage de la photosphère est alors bloqué et réduit dans les taches, ce qui les rend plus froides que le milieu environnant. On peut dire aussi que l'énergie qui n'est pas fournie par convection aux taches solaires est transmise à ces dernières sous forme d'ondes magnétohydrodynamiques.

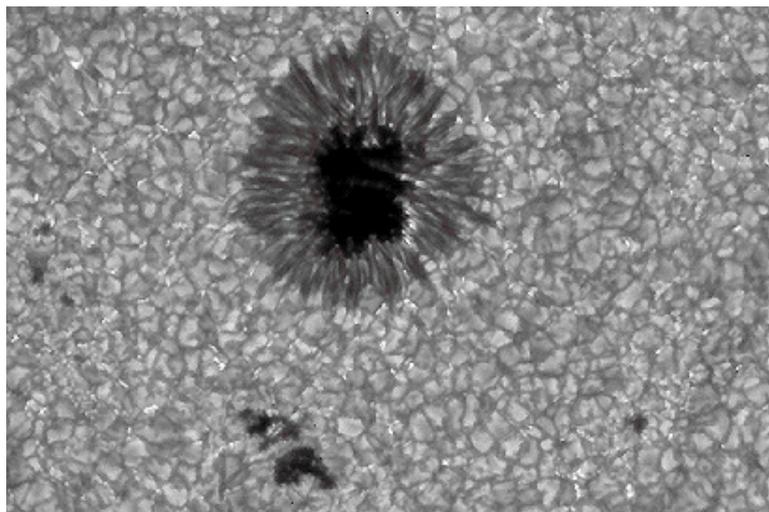


Figure 1.3 : Une tache solaire typique. L'*ombre* correspond à la zone la plus sombre, la structure en filaments est la *pénombre*. Les *granulations* photosphériques sont bien visibles entourant la tache solaire.

Différentes observations ont montrés que les lignes du champ magnétique au dessus de l'ombre d'une tache solaire typique sont principalement verticales, au niveau de la photosphère (Figure 1.4).

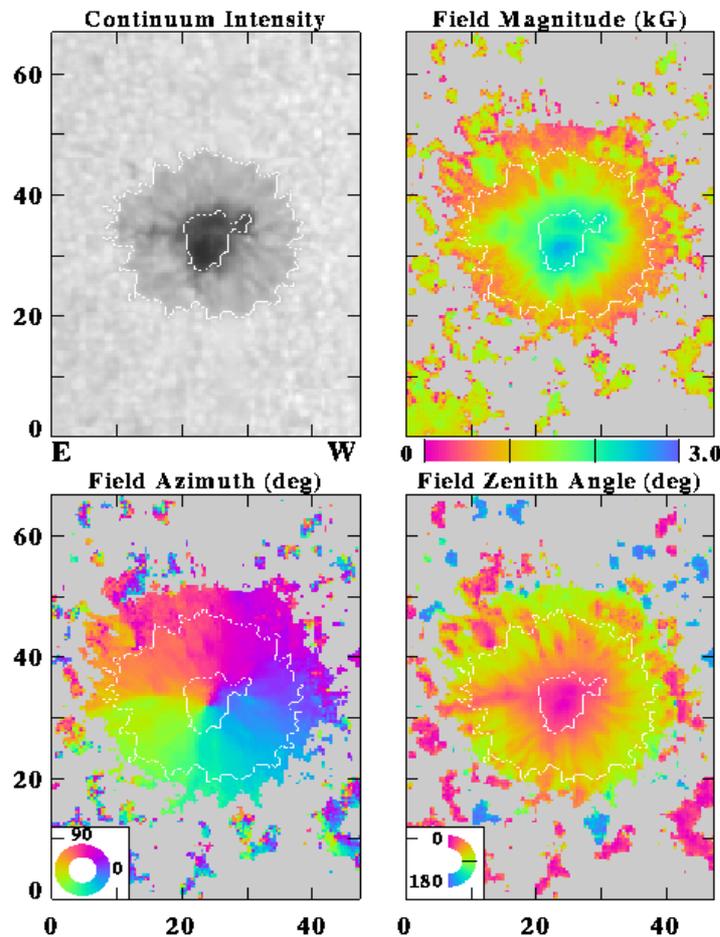


Figure 1.4 : Intensité et orientation du vecteur champ magnétique dans une tache solaire et ses alentours. (Instrument : Advanced Stokes Polarimeter ASP)

L'ombre d'une tache est entourée d'une région moins sombre, appelée *pénombre*, qui a une structure filamentaire (Figure 1.3). Ces structures ne sont pas d'égale luminosité ; certaines sont sombres, d'autres brillantes. Le champ magnétique est très incliné sur la verticale avec une inclinaison qui croît de la frontière de l'ombre vers l'extérieur de la pénombre où le champ est horizontal.

Les taches solaires ont une durée de vie de quelques jours à un mois. A leur origine, un *pore* est une tache de dimension dix fois plus faible et dénuée de pénombre. Ces pores ont en

général des durées de vie de quelques heures à quelques jours, mais ils peuvent se développer en donnant naissance à des taches.

La plupart des taches solaires sont groupées par deux. Dans ces groupes bipolaires, les deux taches ont des polarités magnétiques opposées. Mais dans un grand nombre de cas, les taches sont isolées ; les lignes de force issues de l'ombre de tache retournent vers la photosphère et non vers une autre tache. Seulement 1% des taches sont des groupes complexes comprenant plusieurs taches qui, de leurs nombres et leurs répartitions, impliquent l'existence de variations spatiales très importantes du champ magnétique.

L'activité solaire résulte des champs magnétiques qui, des couches convectives, émergent dans l'atmosphère solaire. De ce fait, les taches solaires sont l'une des sources principales de l'activité solaire. Tout indice établi à partir des taches a une certaine signification physique et résulte de l'observation la plus simple que l'on puisse réaliser avec une lunette.

L'étude des taches a permis de mettre en évidence un cycle qui s'étend sur une période d'environ 11 ans : le *cycle undécennal* des taches solaires ; chaque 11 ans, on observe un nombre maximum de taches sur la surface solaire, le dernier maximum a été durant l'année 2001 (Figure 1.5)

Les groupes de taches solaires, disposés parallèlement à l'équateur de l'astre, manifestent le plus souvent une bipolarité caractéristique : la tache de tête (dans le sens de rotation du soleil) présente une polarité magnétique nord, alors que la tache de queue manifestera une polarité magnétique sud, et ce, pour le même hémisphère. Par contre, sur l'autre hémisphère, la polarité est inversée.

La même polarité se conserve durant tout un cycle undécennal et s'inverse au cycle suivant, ce n'est qu'après deux cycles, c'est à dire après 22 ans environ, que des polarités identiques se retrouvent, on peut considérer donc que le cycle des taches solaires est en réalité de 22 ans environ.

Les observations ont montrés aussi que la position des taches solaires varie de la latitude 35° jusqu'à l'équateur durant le cycle (Figure 1.5).

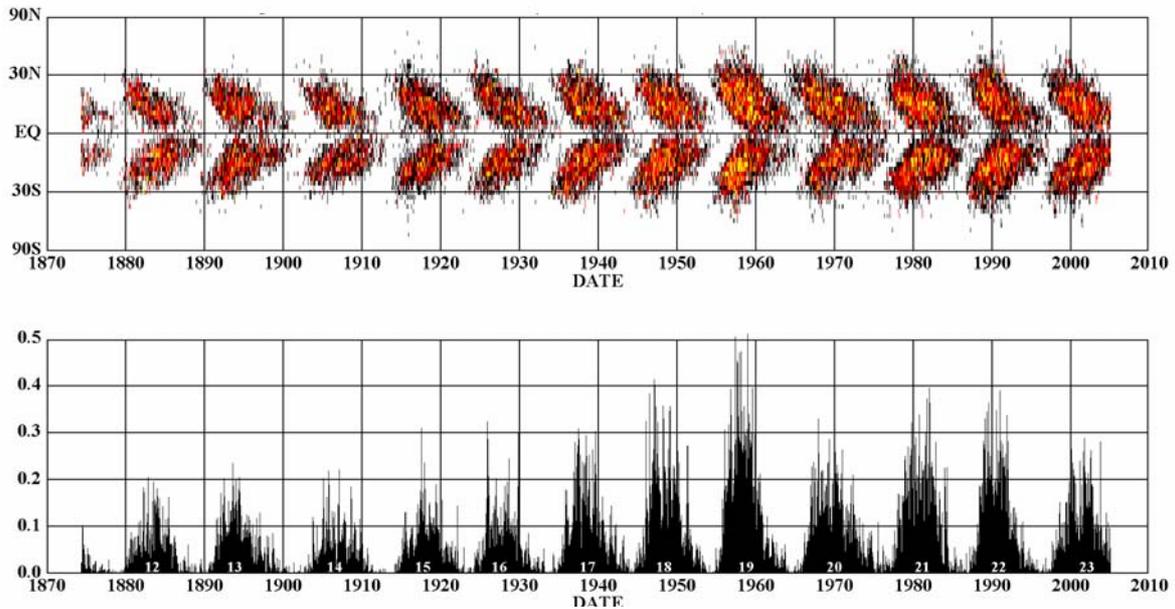


Figure 1.5 : Le cycle undécennal des taches solaires (pourcentage de surface occupé par les taches solaires dans l'hémisphère visible du soleil en fonction du temps) et le diagramme « Papillon » qui représente l'évolution de la latitude des taches solaire (NASA/Solar Physics).

1.4.2-Les facules :

Régions brillantes visibles vers le bord du disque photosphérique, dans laquelle la distribution des champs magnétiques forts, plus dispersée, se traduit au contraire par une augmentation d'éclat.

1.4.3-Les éruptions Solaires (*flares*) :

Ils constituent un phénomène chromosphérique important, il est plus fréquent durant le maximum d'activité; c'est un gigantesque jet de particules chargées, visible en lumière blanche, ultraviolet et rayons X ; il ne dure généralement que quelques minutes. L'éruption apparaît optiquement comme un sursaut d'éclat, elle résulte de la reconfiguration soudaine d'une paire de champs magnétiques ; ainsi, un plasma très chaud est émis, et des particules chargées sont éjectées.

1.4.4-Les protubérances (*prominences*) :

Ce sont d'énormes nuages de gaz lumineux et chauds s'élevant dans la couronne jusqu'à une altitude qui peut dépasser 100 000 km, leur étendue va parfois au delà de 300 000 km, et leur durée d'existence peut aller jusqu'à 10 mois environ.

Les protubérances dépendent de l'activité solaire, mais leur localisation ne correspond pas exactement à celle des taches solaires: elles peuvent apparaître à de hautes latitudes jusqu'aux régions polaires. Bien qu'aucune théorie n'explique véritablement le phénomène des protubérances et notamment leur mouvement, ce qui est sûr, est que ce phénomène est totalement placé sous l'influence de champs magnétiques locaux.

1.4.5-Boucles magnétiques :

Ces structures ressemblent à des morceaux de tores qui auraient deux pieds dans la photosphère. On les trouve au dessus des centres actifs ; certaines, géantes, peuvent relier deux centres actifs. Il en existe de toutes tailles (quelques centaines de kilomètres jusqu'à des dizaines de milliers de kilomètres) et de toutes températures : de 10^4 K à 10^6 K.

1.5-Rotation du Soleil :

Le Soleil tourne sur lui même, mais avec une vitesse si faible que l'on a pu, jusqu'à présent, constater avec certitude un aplatissement aux pôles. Au 16° degré de latitude nord ou sud, la rotation synodique est de 27.275 jours, par contre, la durée effective de rotation sidérale est de 25.380 jours.

Mais le Soleil constitue une masse fluide, et non, comme la Terre, une masse solide; par conséquent, la vitesse de rotation est d'autant plus faible que l'on s'éloigne de l'équateur, le couplage entre cette rotation et le mouvement convectif du fluide dans la zone de convection conduit à ce qu'on appelle la *rotation différentielle* du Soleil. Ainsi, à l'équateur, la rotation sidérale s'effectue en 25.03 jours, en 30 jours environ à 60° de latitude, et près des pôles, elle s'effectue en 34 jours environ.

La vitesse de rotation équatoriale s'élève à environ 2km/s. L'inclinaison de l'axe de rotation du Soleil sur l'écliptique est de $7^\circ 11'$.

1.6-Oscillations du Soleil :

En 1962, Leighton, Noyes et Simon remarquent une variation périodique quasi sinusoïdale de 3 à 8 minutes au niveau de la surface solaire, ceci marque la découverte des "oscillations de 5 minutes".

L'interprétation théorique de ces oscillations a été donnée plus tard par Ulrich (1970), Leibacher et Stein (1971), et Wolff (1972), ces derniers ont montrés que ces oscillations affectent l'ensemble de la masse du Soleil et non seulement la surface, et sont la conséquence de la superposition d'un grand nombre d'oscillations élémentaires ou "modes d'oscillations", de nature acoustique ; ils sont piégés à l'intérieur d'une cavité résonnante au dessous de la surface solaire.

En 1975, Deubner vérifia expérimentalement qu'il existe une relation bien précise entre la période et la longueur d'onde de chacun de ces modes d'une part, et la vitesse du son à l'intérieur du Soleil d' autre part, ceci fut le point de départ de **l'héliosismologie**.

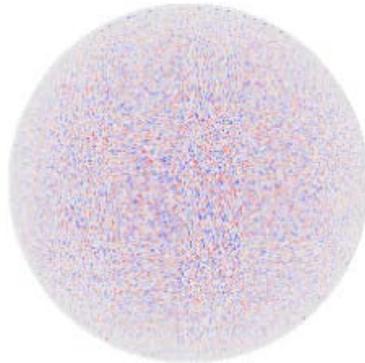


Figure 1.6 : Carte des vitesses du gaz à la surface du Soleil mesurées par l'expérience MDI à bord de la sonde spatiale SOHO, les points rouges représentent un mouvement qui s'éloigne de nous, en bleu un mouvement qui s'approche de nous (effet Doppler), le fait que le signal est intense au centre et faible aux bords du disque indique que le mouvement est principalement radial.

L'intérieur du Soleil semble parcouru par deux modes d'oscillations différents:

- le mode de gravité interne ou mode "g", attribué à des ondes de gravité qui occuperaient selon la théorie, la zone radiative, mais qui n'ont pas encore été mises en évidence .

- le mode de pression ou mode "P", il correspond aux oscillations de 5 minutes qui sont bien visibles au niveau de la surface.

En théorie, plusieurs millions de modes propres sont identifiables dont plus de 10 000 ont déjà été effectivement mesurés. Certaines oscillations sont expliquées par l'interférence des ondes qui sont réfractées en profondeur avec celles réfléchies en surface.

Chacun des paramètres de ces modes est porteur d'informations sur les conditions physiques des diverses couches traversées ; ainsi, l'observation des modes de pression a permis de définir en quelques années les caractéristiques de la zone convective (température, extension, pression, densité...) et d'en fixer la profondeur.

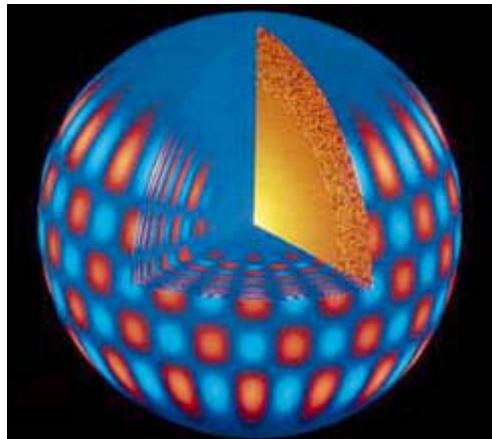


Figure 1.7 : simulation numérique (NOAO/GONG) qui représente la résonance d'une onde acoustique à l'intérieur du Soleil, on voit aussi les ondes se propageant à la surface du Soleil : en rouge les régions se déplaçant vers l'intérieur du Soleil, en bleu celles s'éloignant de l'intérieur (effet Doppler).



Figure 1.8 : Une simulation d'un mode de vibration à la surface exagéré 1000 fois. (NASA/Solar Physics).

En prenant comme référence la surface solaire, on a constaté qu'au niveau moins 50 000 km, la période de rotation est de 26,6 jours, et 29 jours à 0,5 rayon solaire.

Par contre la zone radiative semble tourner rapidement sans rotation différentielle, mais comme un solide, ce qui laisse à penser qu'il existe une frontière entre les deux régimes de rotation, sous forme d'une discontinuité de faible épaisseur (environ 0,1 rayon solaire).

Cette région de faible épaisseur connue par **la tachocline** n'est pas observable pour le moment, mais semble être la clef du mécanisme qui caractérise le phénomène de la dynamo solaire et peut être le site de création du champ magnétique.

1.7-Les travaux effectués sur les oscillations dans une atmosphère stratifiée et magnétique :

L'étude des oscillations qui existent dans une atmosphère stratifiée est très intéressante, la distribution de leurs fréquences et la variation de leurs amplitudes révèlent des informations très utiles et fournissent un diagnostic important des conditions physiques dans lesquelles ce piégeage prend place au sein de cette portion d'atmosphère. Le mode acoustique solaire piégé ou le mode *P* (Pression) ainsi que le mode de pulsation *g* (stratification gravitationnelle stable) dans les autres étoiles sont des exemples bien précis de ce cas. Des études détaillées de ces modes révèlent d'importantes informations sur la composition élémentaire des étoiles, ainsi que sur leurs rotations et la variation de la vitesse du son avec la profondeur. Beaucoup de plasmas astrophysiques, y compris notre soleil et les étoiles présentent une atmosphère magnétique, plane et parallèle, et favorable à un piégeage des modes d'oscillations. Cependant, les caractéristiques de propagation des ondes Magnéto-Atmosphériques présentent un grand degré de complexité (Thomas 1983), en particulier le problème de l'orientation du champ magnétique par rapport à la stratification gravitationnelle. Les deux cas les plus simples correspondent à un champ magnétique perpendiculaire à la gravité (horizontal) ou bien parallèle à celle-ci (vertical).

1.7.1-Champ magnétique horizontal :

- ❑ Lorsque cette atmosphère est *isotherme* et stratifiée, et dans le cas d'absence du champ magnétique, il n'existe pas d'oscillations piégées.
- ❑ Lorsque cette atmosphère est *isotherme* et stratifiée, avec un champ magnétique horizontal et *uniforme* (Nye et Thomas, 1976 ; adam, 1989), ou un champ décroissant

avec la profondeur et proportionnel à la racine carré de la densité (Yu, 1965), dans ces deux cas, les oscillations sont piégées, par conséquent, ces deux atmosphères semblent soutenir le piégeage naturel de mode d'oscillations.

Nye et Thomas en 1974 ont démontré que pour une variation générale de la vitesse acoustique et la vitesse d'Alfvén avec la profondeur, les équations qui gouvernent ce milieu sont des équations différentielles ordinaires de 2^{èm} ordre, à partir desquelles on obtient des fréquences propres discrètes.

Un résultat intéressant c'est que une atmosphère *polytrophe* (vitesse du son proportionnelle à la profondeur z) avec un champ magnétique uniforme et horizontal ne possède pas des modes d'oscillations propres et discrètes.

1.7.2-Champ magnétique vertical :

Un champ magnétique vertical constitue une configuration possible de l'atmosphère magnétique de l'ombre d'une tache solaire, mais cette dernière demeure compliquée et pas entièrement comprise par rapport à celle d'un champ magnétique horizontal.

La première complication qu'on trouve dans ce cas est que les équations gouvernantes sont des équations différentielles ordinaires de 4^{èm} ordre (Thomas, 1983).

La seule atmosphère qui possède des solutions analytiques est l'atmosphère *isotherme* stratifiée traversée par un champ magnétique *uniforme* et *vertical* (Ferraro & Plumpton, 1957 ; Scheuer & Thomas, 1981 ; Leroy & Schwartz, 1982 ; Zhugzda & Dzhalilov, 1984 ; Lou, 1988 ; Abdelatif, 1990 ; Wood, 1990 ; Hasan & Christensen Dalsgaard, 1992 ; Cally, 2001). Les solutions de ces équations sont écrites en terme des fonctions de Meijer G.

Une atmosphère *isotherme* et *non magnétique* ne possède pas de modes d'oscillations piégés. Dans le cas *magnétique*, on peut imposer des conditions aux limites artificielles à cette atmosphère, ce qui va créer une cavité résonnante avec un spectre discret de mode propre. Malheureusement, ces fréquences obtenues vont dépendre plus de la localisation de ces couches réfléchissantes imposées que de l'intensité du champ magnétique.

Le cas d'une atmosphère *Polytrophe* stratifiée, traversée par un champ magnétique *uniforme* et *vertical* est beaucoup plus compliqué; en plus des difficultés citées ci-dessus, la vitesse acoustique n'est pas constante comme dans le cas isotherme, mais proportionnelle à la profondeur z (la température $T \propto z$). Cette atmosphère favorise le piégeage des modes

propres d'oscillations (Robert & Soward, 1983 ; Spruit et Bogdan, 1992 ; Cally et Bogdan, 1993 ; Cally, Bogdan et Zweibel, 1994 ; Bogdan et Cally, 1997).

Cette atmosphère semble aussi la mieux placée pour simuler l'ombre d'une tache solaire, on peut justifier ceci par ces 3 points :

- Les observations ont montrés que le champ magnétique est pratiquement vertical à la surface de l'ombre d'une tache solaire, alors qu'il est quasi horizontal dans la zone de pénombre.
- L'observation des taches solaires a montré qu'il existe un mode d'oscillation propre dans la tache solaire.
- La théorie de la résonance photosphérique explique que le piégeage des modes propres se fait au niveau de la cavité sub-photosphérique, ce qui est équivalent à la zone de convection, dans cette dernière, et dans le cadre du modèle de Maltby et al. (1986), une partie du profil de température présente bien le cas d'un polytrophe, c'est à dire $T \propto z$ figure (1.9)

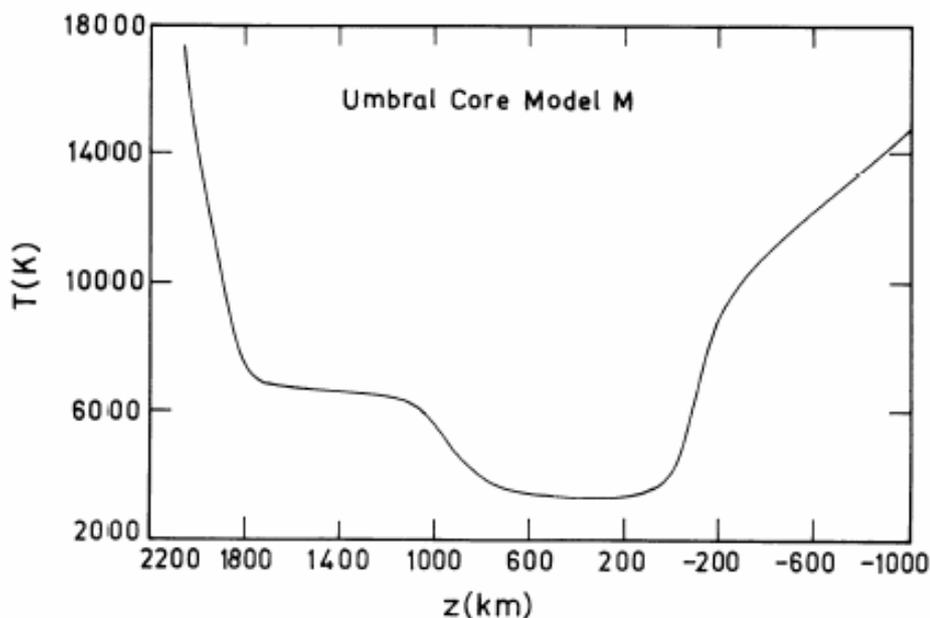


Figure 1.9 : La zone de convection correspond à une profondeur négative, on voit que la Température augmente linéairement avec la profondeur, c'est une atmosphère polytrophe. (Maltby et al. 1986)

Le processus de réchauffement de la couronne est l'un des grands mystères de la physique solaire. En principe, les températures diminuent lorsque on s'éloigne de la surface, mais au contraire, la température s'élève au niveau de la chromosphère et de la couronne. Plusieurs

mécanismes ont été suggérés afin d'expliquer ce chauffage. Le mécanisme du transfert des oscillations à partir des taches solaires vers la chromosphère et la couronne constitue l'une des explications les plus plausibles de ce réchauffement, d'où l'intérêt de l'étude des oscillations au niveau des taches solaires.

Dans le cadre de notre thèse qui concerne l'étude des ondes Magnéto-Atmosphériques dans une atmosphère polytrophe et traversée par un champ magnétique uniforme et vertical, on propose le plan de travail suivant :

Au chapitre 2, on va se consacrer à l'étude des ondes Magnéto-Acoustiques, et à la détermination des équations Magnéto-Acoustique-Gravité. Au chapitre 3, toutes les équations de base pour une atmosphère polytrophe seront développées, ainsi qu'une étude du polytrophe non magnétique. Enfin, le chapitre 4 est dédié à l'étude du polytrophe magnétique et aux discussions des solutions et des méthodes numériques employées, et on terminera avec la conclusion, la conclusion générale et les perspectives.

2.1-Introduction :

L'atmosphère solaire est un vaste champ d'études pour les phénomènes physiques les plus variés ; le transfert de rayonnement, l'équilibre statique, ainsi que la *magnétohydrodynamique* (MHD). Le jeu des forces d'attraction gravitationnelle implique de fortes pressions dans les régions centrales du Soleil, ceci entraîne une très haute température de l'ordre de 15 millions de kelvins qui déclenche des réactions nucléaires, sources de grandes quantités d'énergie. L'énergie est transportée vers l'extérieur de l'étoile par divers processus : rayonnement de photons, vent solaire, phénomène de convection, ondes acoustiques et *magnéto-acoustiques*.

Dans ce chapitre, on va d'abord introduire les équations MHD, étudier ces équations en négligeant tout les phénomènes de dissipation d'énergie ou de rotation, l'état d'équilibre MHD nous permettra de faire une application sur les taches solaires et comprendre certaines de leurs propriétés. Les équations Magnéto - Acoustique - Gravité qui gouvernent les ondes Magnéto-Atmosphériques seront dérivées ; ces dernières seront simplifiées dans le cas des ondes magnéto-acoustiques, c'est à dire en présence d'un champ magnétique uniforme et en absence de stratification gravitationnelle ; dans ce cas, les seules forces qui peuvent engendrer ces ondes dans ce milieu sont :

- 1-La force de pression.
- 2-La force de Lorentz.

Les caractéristiques essentielles des ondes magnéto-acoustiques seront développées dans ce chapitre, entre autres, la relation de dispersion, les expressions de la vitesse de groupe et de la vitesse de phase.

Enfin, la variation du vecteur perturbation de vitesse par rapport au vecteur d'onde va nous permettre de déceler la nature de l'onde, ainsi que les caractéristiques des différents modes.

2.2-Magnétohydrodynamique (MHD) :

La Magnétohydrodynamique est l'étude du comportement d'un fluide conducteur en présence d'un champ magnétique ; c'est une synthèse de la dynamique des fluides et de l'électromagnétisme dans l'approximation non relativiste, elle peut être considérée comme une approximation de la physique des plasmas pour les phénomènes de basse fréquence, quand il est légitime de négliger les effets de séparation des charges ainsi que le courant de déplacement. Précisément, on applique MHD quand on a les conditions suivantes :

- 1- Le temps caractéristique >> période gyromagnétique de l'ion.
- 2-la distance caractéristique >> rayon de Larmor et le libre parcours moyen de l'ion.
- 3-Les vitesses dans le plasma sont non relativistes.

Ces conditions présentent le cas de plusieurs plasmas astrophysiques comme l'atmosphère solaire.

Commençons d'abord par écrire les équations électromagnétiques générales de Maxwell, avec \vec{E} , le champ électrique, q_c densité de charge, \vec{j} la densité de courant, l'induction magnétique \vec{B} :

La loi d'ampère :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \cdot \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{2.1}$$

c est la vitesse de la lumière $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$, μ étant la perméabilité magnétique et ϵ est la permittivité du plasma,

La loi de Faraday :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.2}$$

Équation de Maxwell-Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q_c}{\epsilon} \tag{2.3}$$

L'équation qui exprime l'absence des monopoles magnétiques :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.4}$$

Soit D une échelle de distance typique de la variation du champ, T le temps caractéristique associé. Dans l'approximation MHD, nous avons $D / T \ll c$, on peut donc réécrire les équations de Maxwell simplifiées. La loi d'Ampère se réduit à :

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \tag{2.5}$$

Dans l'approximation MHD, le champ électrique \vec{E} est entièrement déterminé par la vitesse \vec{V} et le champ magnétique \vec{B} , ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{B}) + \eta \cdot \nabla^2 \vec{B} \tag{2.6}$$

avec $\eta = \frac{1}{\mu \sigma}$ représente le terme de la diffusivité magnétique, σ étant la conductivité électrique.

Le 1^{er} terme est le terme dynamique (convection), le 2^{ème} terme est le terme de diffusion.

Afin de comparer la magnitude des deux termes, faisant le rapport des intensités :

$$\frac{\vec{\nabla} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{B})}{\eta \cdot \nabla^2 \vec{B}} = \frac{VB/D}{\eta B/D^2} = \frac{VD}{\eta}$$

Ce rapport est le nombre de Reynold magnétique $R_m = \frac{VD}{\eta}$.

Si $R_m \ll 1$ régime magnétique de diffusion : $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta \cdot \nabla^2 \vec{B}$

Si $R_m \gg 1$ régime magnétique de convection : $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{B})$

2.2.1-Force de Lorentz :

L'équation du mouvement pour une charge isolée q avec la vitesse \vec{V} est donnée par $\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$ (2.7)

Dans l'approximation MHD, la force électrique est négligeable devant la force magnétique, la densité de force n'est que la force de Lorentz :

$$\vec{F} = \text{Force de Lorentz} = \vec{j} \wedge \vec{B}$$

Essayons maintenant d'expliciter $\vec{j} \wedge \vec{B}$:

Nous avons déjà obtenu que $\vec{j} = \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$ et donc

$$\vec{F} = \frac{1}{\mu} (\nabla \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}$$

En développant le triple produit vectoriel, on retrouve la force de Lorentz :

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{\mu} - \frac{B^2}{2\mu} \cdot \vec{I} \right) \tag{2.8}$$

$\frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{\mu}$: Tenseur de tension magnétique le long des lignes du champ.

$\frac{B^2}{2\mu}$: Tenseur de pression magnétique isotrope. \vec{I} : Dyade unité.

2.2.2-Equilibre MHD et taches solaires :

En considérant maintenant que notre plasma est un fluide, ρ et P sont la masse volumique et la pression respectivement, écrivons l'équation du mouvement d'un élément de ce milieu, l'équation d'Euler :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\nabla P + \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (2.9)$$

Pour un milieu sans écoulement, nous avons $V = 0$. En considérant que le plasma est idéal et

en équilibre $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, dans ce cas, l'équation (2.9) s'écrit comme : $\nabla P = \vec{j} \wedge \vec{B}$

$$\text{or } \vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B} = \nabla \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{\mu} - \frac{B^2}{2\mu} \cdot \vec{I} \right) = \nabla P$$

ce qui revient à écrire la condition d'équilibre

$$-\nabla \left(P + \frac{B^2}{2\mu} \right) + \frac{1}{\mu} \nabla (\vec{B} \cdot \vec{B}) = 0 \quad (2.10)$$

Considérant une tache solaire comme un tube à flux magnétique vertical, le champ magnétique uniforme \vec{B}_0 est perpendiculaire à la surface solaire. La pression cinétique est P_0 à l'intérieur du tube, et P_E à l'extérieur. Les températures intérieure et extérieure de la tache sont respectivement, T_0 et T_E (figure 2.1)

Dans ce cas magnétostatique, le terme qui représente la tension magnétique dans l'équation (2.10) est égal à zéro.

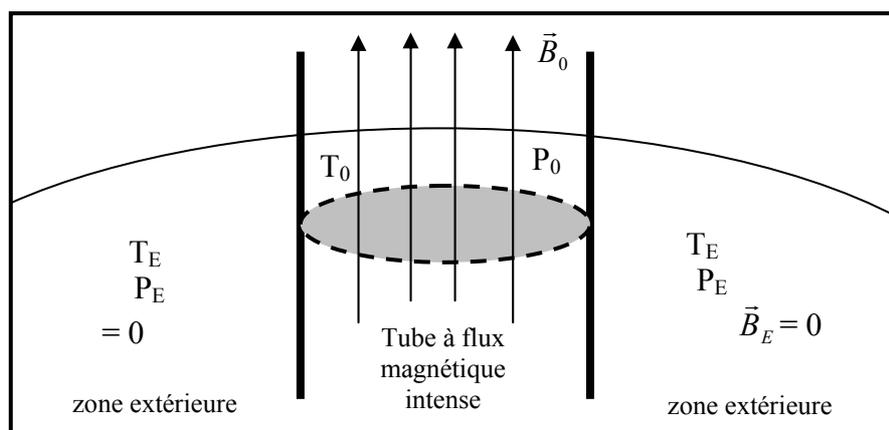


Figure 2.1

La condition d'équilibre devient donc
$$\vec{\nabla} \left(P + \frac{B^2}{2\mu} \cdot \vec{I} \right) = 0 \quad (2.11)$$

Ce qui est équivalent à dire que la pression totale intérieure est égale à la pression totale extérieure de la tache solaire. On peut écrire donc :

$$P_E = P_0 + \frac{B_0^2}{2\mu} = \text{Pression cinétique} + \text{Pression magnétique} \quad (2.12)$$

De l'équation (2.12) on a $P_0 = P_E - \frac{B_0^2}{2\mu}$: la pression gazeuse à l'intérieur du tube

magnétique est inférieure à la pression gazeuse du plasma dans lequel ce tube est immergé. ainsi, l'apparition des champs magnétiques dans la photosphère visible résulte de la poussée d'Archimède du plasma sur les tubes de force.

Le temps mis par le tube pour atteindre la surface est d'autant plus court que le champ magnétique est plus élevé ; il dépend aussi de la profondeur à laquelle le tube a été formé. Les temps d'ascension varient, selon les auteurs, entre deux mois et dix ans.

Considérons maintenant que les densités à l'intérieur et à l'extérieur de la tache solaire sont égales, $\rho_0 = \rho_E$. En divisant l'équation (2.12) par ρ_0 :

$$\frac{P_E}{\rho_E} = \frac{P_0}{\rho_0} + \frac{B_0^2}{2\mu\rho_0} \quad (2.13)$$

En utilisant l'équation d'état $P \cdot \nu = N \cdot k_B \cdot T$, ν étant le volume, on peut écrire

$$P_E = 2 \frac{k_B}{m_i} \rho_E T_E \quad \text{et} \quad P_0 = 2 \frac{k_B}{m_i} \rho_0 T_0$$

En remplaçant ces expressions dans (2.13), et après simplifications, on a :

$$\frac{T_0}{T_E} = 1 - \frac{B_0^2}{2 \cdot \mu \cdot P_E} \quad (2.14)$$

Ceci nous conduit à conclure que $T_0 < T_E$: la température à l'intérieur de l'ombre d'une tache solaire est inférieure à celle du milieu ambiant de la photosphère.

Plasma - β :

Nous avons l'équation de la magnétostatique $\vec{\nabla}P = \vec{j} \wedge \vec{B}$, ainsi que $\vec{j} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$,

l'approximation MHD nous permet d'écrire : $\vec{j} \approx \frac{1}{\mu} \frac{\vec{B}}{D}$ et donc $\nabla P \approx \frac{P}{D} = \frac{1}{\mu} \frac{B^2}{D}$

de cette dernière équation, on peut tirer le paramètre $\beta = 2 = \frac{P}{B^2/2\mu}$

on pose $\beta = \frac{\text{la pression du gaz}}{\text{la pression magnétique}} = \frac{P}{B^2/2\mu}$

En réalité, la valeur du β varie d'un milieu à un autre dans les différentes structures du Soleil ; par exemple $\beta \approx 3.5 \times 10^{-3}$ dans la couronne solaire, ou encore $\beta \approx 2$ au niveau du tube à flux magnétique de la photosphère et aussi dans le vent solaire au voisinage de l'orbite terrestre.

2.3-Les Ondes MHD :

Considérant un plasma astrophysique, avec une vitesse \vec{V} , une pression P et une densité ρ ; ce plasma baigne dans un champ magnétique \vec{B} , il est soumis à la force de gravitation $\rho \cdot \vec{g}$, ainsi que la force de Lorentz $\vec{j} \wedge \vec{B}$.

L'équation de Navier-Stokes pour ce fluide est :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla}P + \vec{f}$$

En se place dans le régime magnétique de convection (éq.2.6), on peut écrire la force \vec{f}

comme : $\vec{f} = \rho \cdot \vec{g} + \vec{j} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{j} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$

ce qui revient à écrire :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla}P + \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} + \rho \cdot \vec{g} \quad (2.15)$$

A l'équilibre, nous avons $\vec{V} = 0$, $P = P_0$, $\rho = \rho_0$, $\vec{B} = \vec{B}_0$, l'équation (2.15) se réduit à :

$$\vec{\nabla}P_0 = \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_0) \wedge \vec{B}_0 + \rho_0 \cdot \vec{g} \quad (2.16)$$

Pour l'équation de continuité, on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.17)$$

Soit l'équation d'état $P = P(\rho, S)$, S étant l'entropie, donc

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S d\rho + \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_\rho dS$$

pour une entropie constante, on a
$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S d\rho$$

La célérité du son
$$C_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S$$

ce qui revient à écrire $dP = C_s^2 d\rho$, ou encore :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} P = C_s^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho \right) \quad (2.18)$$

Dans le régime magnétique de convection (éq.2.6), nous avons l'équation de variation du champ magnétique :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (2.19)$$

Considérons maintenant l'existence de petites perturbations eulériennes autour de la position d'équilibre :

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t) + \vec{B}_0$$

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t) + 0$$

$$P = P(\vec{r}, t) + P_0$$

$$\rho = \rho(\vec{r}, t) + \rho_0$$

Développons d'abord le terme $(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}$ en utilisant toujours l'approximation MHD,

après simplification on obtient :

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_0) \wedge \vec{B} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}_0 \quad (2.20)$$

En remplaçant les paramètres perturbés dans l'équation de continuité (2.17) et l'équation (2.18), on obtient respectivement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{V}) = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} P_0 = C_s^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho_0 \right) \quad (2.22)$$

avec C_s est l'expression de la vitesse acoustique en 1^{er} ordre .

De même pour l'équation de Navier-stocks (2.15), en remplaçant aussi l'expression (2.20) ainsi que (2.16), et en négligeant les termes d'ordre 2 et les termes non linéaires, et après simplifications on obtient :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P + \rho_0 \vec{g} + \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}_0 + \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_0) \wedge \vec{B} \quad (2.23)$$

Pour l'équation (2.19), on trouve $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{B}_0)$

En résumé, les équations MHD perturbées et linéaires sont (Thomas 1983) :

Équation du moment :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P + \rho_0 \vec{g} + \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}_0 + \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_0) \wedge \vec{B} \quad (2.24)$$

Equation de l'énergie :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} P_0 = C_s^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho_0 \right) \quad (2.25)$$

Equation de la magnétohydrostatique :

$$\vec{\nabla} P_0 = \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_0) \wedge \vec{B}_0 + \rho_0 \vec{g} \quad (2.26)$$

Équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{V}) = 0 \quad (2.27)$$

Equation de l'induction :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{B}_0) \quad (2.28)$$

2.4-Les ondes MAG : Magnéto - Acoustique – Gravité :

Soit l'équation du moment $\rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\vec{\nabla}P + \rho \vec{g} + \frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}_0 + \frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_0) \wedge \vec{B}$

dérivons cette équation par rapport au temps :

$$\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) + \frac{\vec{g}}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{4\pi \rho_0} \left[(\vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \wedge \vec{B}_0 + (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_0) \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \quad (2.29)$$

à partir des équations (2.25) et (2.27) on a les expressions de $\frac{\partial P}{\partial t}$ et $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ respectivement,

ainsi que $\vec{\nabla}P_0$ de l'équation (2.26) ; en les remplaçant dans l'équation (2.29), et après simplifications on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} (C_s^2 \rho_0 \vec{\nabla} \vec{V}) + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{V}}{4\pi} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_0) \wedge \vec{B}_0 \right) + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} (\vec{V} \rho_0) \vec{g} - \frac{1}{\rho_0} \vec{g} \vec{\nabla} (\rho_0 \vec{V}) \\ &+ \frac{1}{4\pi \rho_0} \left[(\vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \wedge \vec{B}_0 + (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_0) \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Après développement, on a :

$$\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} (\vec{V} \rho_0) \vec{g} - \frac{1}{\rho_0} \vec{g} \vec{\nabla} (\rho_0 \vec{V}) = \vec{\nabla} (\vec{V} \vec{g}) - (\vec{\nabla} \vec{V}) \vec{g} \quad (2.31)$$

$$\text{Nous avons aussi} \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{B}_0) \quad (2.32)$$

$$\text{avec} \quad (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_0) \wedge \vec{B}_0 = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} B_0^2 + (\vec{B}_0 \vec{\nabla}) \vec{B}_0 \quad (2.33)$$

Finalement, en substituant les équations (2.31), (2.32) et (2.33) dans l'égalité (2.30), on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} (C_s^2 \rho_0 \vec{\nabla} \vec{V}) - (\vec{\nabla} \vec{V}) \vec{g} + \vec{\nabla} (\vec{V} \vec{g}) - \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \left[\vec{V} \vec{\nabla} \left(\frac{B_0^2}{8\pi} \right) - \frac{1}{4\pi} \vec{B}_0 \vec{\nabla} \vec{B}_0 \right] \\ &+ \frac{1}{4\pi \rho_0} \left[\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{B}_0)) \wedge \vec{B}_0 + (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_0) \wedge (\vec{\nabla} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{B}_0)) \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

Dans le cas d'un champ magnétique uniforme \vec{B}_0 , l'équation (2.34) devient:

$$\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} (C_s^2 \rho_0 \vec{\nabla} \vec{V}) - (\vec{\nabla} \vec{V}) \vec{g} + \vec{\nabla} (\vec{V} \vec{g}) + \frac{1}{4\pi \rho_0} \left[\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{B}_0)) \wedge \vec{B}_0 \right] \quad (2.35)$$

En terme de vecteur unité du champ magnétique $\vec{b}_0 = \frac{\vec{B}_0}{|B_0|}$, $|b_0|^2 = 1$, et en posant

$C_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0}$, C_A représente la vitesse d'Alfven, l'équation (2.35) se réduit à :

$$\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} = \gamma \vec{g} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} + C_s^2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \cdot \vec{g} + \vec{\nabla} (\vec{V} \cdot \vec{g}) + C_A^2 \left[\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{b}_0)) \wedge \vec{b}_0 \right] \quad (2.36)$$

Posons maintenant $\vec{V} = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y + V_z \vec{e}_z$; supposons que la perturbation de vitesse

$\vec{V} = \vec{V}(x, z)$ est sous la forme d'une onde plane $V = V(z) \cdot \exp i(kx - \omega t)$, avec

$V_x = U_x(z) \cdot \exp i(kx - \omega t)$, $V_y = U_y(z) \cdot \exp i(kx - \omega t)$, $V_z = U_z(z) \cdot \exp i(kx - \omega t)$ et $k = k_\perp$.

Le champ magnétique étant parallèle à l'axe oz , perpendiculaire à la surface du Soleil, on pose donc $\vec{b}_0 = b_0 \vec{e}_z$. Le champ de gravitation est dans le sens inverse $\vec{g} = -g \vec{e}_z$.

En remplaçant ces termes dans l'équation générale (2.36), et après tous les calculs et simplification de l'exponentielle, on trouve :

$$\begin{aligned} -\omega^2 U_x \vec{e}_x - \omega^2 U_y \vec{e}_y - \omega^2 U_z \vec{e}_z &= C_s^2 \cdot \left(ik \frac{\partial U_z}{\partial z} - k^2 U_x \right) \cdot \vec{e}_x + C_s^2 \cdot \left(ik \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) \cdot \vec{e}_z \\ -\gamma g \left(ik U_x + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \cdot \vec{e}_z - ik g U_z \cdot \vec{e}_x - g \frac{\partial U_z}{\partial z} \cdot \vec{e}_z + g \left(ik U_x + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \cdot \vec{e}_z &+ \\ C_A^2 \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2} \cdot \vec{e}_y + C_A^2 \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} - k^2 U_x \right) \cdot \vec{e}_x & \end{aligned} \quad (2.37)$$

Rassemblons les termes de $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ séparément :

$$\begin{aligned} -\omega^2 U_x &= C_s^2 \left(ik \frac{\partial U_z}{\partial z} - k^2 U_x \right) - ik g U_z + C_A^2 \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} - k^2 U_x \right) \\ -\omega^2 U_y &= C_A^2 \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2} \\ -\omega^2 U_z &= C_s^2 \cdot \left(ik \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) - \gamma g \left(ik U_x + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) - g \frac{\partial U_z}{\partial z} + g \left(ik U_x + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\left(\omega^2 - k^2 (C_s^2 + C_A^2) + C_A^2 \frac{d^2}{dz^2} \right) U_x + ik \left(-g + C_s^2 \frac{d}{dz} \right) U_z = 0 \quad (2.38)$$

$$\left(\omega^2 + C_A^2 \frac{d^2}{dz^2} \right) U_y = 0 \quad (2.39)$$

$$\left(C_s^2 \frac{d^2}{dz^2} - \gamma g \frac{d}{dz} + \omega^2 \right) U_z + ik \left(C_s^2 \frac{d}{dz} - (\gamma - 1)g \right) U_x = 0 \quad (2.40)$$

Les équations (2.38), (2.39) et (2.40) sont les équations des ondes Magnéto – acoustique - gravité (Ferraro et Plumpton, 1958 ; Scheuer et Thomas, 1981) ; l'étude des ondes MAG sera détaillée dans le chapitre suivant.

2.5-Ondes Magnéto - Acoustiques :

On considère cette fois que le milieu est homogène, la densité du gaz ρ_0 est uniforme, on néglige la stratification, la vitesse d'Alfvén et la vitesse du son sont uniformes, et donc l'équation (2.36) sera réduite à :

$$\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} = C_s^2 \nabla^2 \vec{V} + C_A^2 \left[\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{e}_z)) \wedge \vec{e}_z \right] \quad (2.41)$$

On remarque que cette équation sera simplifiée si on utilise les variables suivantes :

- La divergence de la vitesse : $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$.
- La composante longitudinale (composante z) de la vorticité : $\Lambda = \vec{e}_z \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})$.
- La dérivée par rapport à z de la composante V_z : $\Gamma = \frac{\partial V_z}{\partial z}$.

On obtient les équations :

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = (C_s^2 + C_A^2) \nabla^2 \Delta - C_A^2 \nabla^2 \Gamma \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} = C_s^2 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} \quad (2.43)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - C_A^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Lambda = 0 \quad (2.44)$$

avec : $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$, $\Lambda = \vec{e}_z \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})$, $\Gamma = \frac{\partial V_z}{\partial z}$.

Les équations (2.42), (2.43) et (2.44) sont des équations scalaires obtenues par Lighthill en 1960.

On remarque d'abord que les équations (2.42) et (2.43) sont couplées, l'équation (2.44) est indépendante. Cette dernière représente la propagation de la composante longitudinale de la vorticité avec une vitesse de phase égale à celle d'Alfven C_A , donc si on applique une perturbation dans ce milieu, une partie se propage sous la forme d'une onde longitudinale avec la vitesse d'Alfven sans atténuation et parallèle au champ magnétique \vec{B}_0 .

On peut dire que les solutions sont de deux types :

1. Ondes compressives ou Magnéto - Acoustiques décrites par les deux équations (2.42) et (2.43).
2. Ondes de torsion incompressibles ou d'Alfven décrites par l'équation (2.44)

2.5.1-Propagation des ondes Magnéto – Acoustiques :

Si on dérive par rapport au temps les deux cotés de l'équation (2.42), on trouve :

$$\frac{\partial^4 \Delta}{\partial t^4} = (C_s^2 + C_A^2) \cdot \nabla^2 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} - C_A^2 \cdot \nabla^2 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}$$

En substituant l'expression de $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}$ dans la dernière équation on trouve :

$$\frac{\partial^4 \Delta}{\partial t^4} = (C_s^2 + C_A^2) \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \Delta - C_A^2 \cdot \nabla^2 \left(C_s^2 \cdot \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} \right)$$

d'où finalement :

$$\frac{\partial^4 \Delta}{\partial t^4} - (C_s^2 + C_A^2) \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \Delta + C_A^2 \cdot C_s^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^2 \Delta = 0 \quad (2.45)$$

C'est l'équation générale des ondes Magnéto – Acoustique compressives.

Dans ce milieu, deux directions spatiales de propagation sont importantes, une parallèle au champ magnétique, et l'autre perpendiculaire.

Soient les transformés de Fourier dans la direction z :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2, \quad -k_z^2 \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \nabla_{\perp}^2 - k_z^2 \rightarrow \nabla^2$$

en remplaçant ces transformés dans l'équation (2.45), on obtient :

$$(C_A^2 + C_s^2) \cdot (\omega^2 - C_T^2 k_z^2) \nabla_{\perp}^2 \Delta + (\omega^4 - (C_A^2 + C_s^2) \cdot \omega^2 k_z^2 + C_A^2 C_s^2 k_z^4) \Delta = 0 \quad (2.46)$$

avec $C_T^2 = \frac{C_A^2 C_s^2}{C_A^2 + C_s^2}$

la quantité C_T est connue par la vitesse du tube . Cette vitesse est importante car elle présente les caractéristiques suivante : $C_T < C_A, C_T < C_S$ et donc

$$C_T < \min (C_A, C_S).$$

En décomposant la quantité $\omega^4 - (C_A^2 + C_S^2).\omega^2 k_z^2 + C_A^2 C_S^2 k_z^4$, on peut la réécrire comme $(\omega^2 - k_z^2 C_A^2).(\omega^2 - k_z^2 C_S^2)$

L'équation (2.46) devient :

$$\nabla_{\perp}^2 \Delta + m^2 .\Delta = 0 \tag{2.47}$$

$$\text{avec } m^2 = \frac{(\omega^2 - k_z^2 C_A^2).(\omega^2 - k_z^2 C_S^2)}{(C_A^2 + C_S^2).(\omega^2 - C_T^2 k_z^2)}$$

L'équation (2.47) est la relation de dispersion des ondes magnéto-acoustiques, discutons maintenant ces solutions, on distingue deux cas :

1^{er} cas : $m^2 > 0$:

$$\nabla_{\perp}^2 \Delta + m^2 .\Delta = 0$$

la solution de cette équation différentielle est une onde plane $\Delta \sim e^{imx}$.

Puisque il s'agit de ∇_{\perp} , donc $m = m_{\perp} = k_{\perp} \Rightarrow \Delta \sim e^{ik_{\perp}x}$.

C'est une onde transversale qui se propage, avec $k_{\perp} = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ nombre transversal réel.

2^{ème} cas : $m^2 < 0$:

$$\nabla_{\perp}^2 \Delta - (-m^2).\Delta = 0$$

la solution de cette équation est une onde sous la forme $\Delta \sim e^{-k_{\perp}x}$.

C'est une onde transversale évanescence.

On peut écrire m^2 en fonction de V_z avec $V_z = \frac{\omega}{k_z}$ comme :

$$m^2 = k_z^2 \frac{(V_z^2 - C_A^2).(V_z^2 - C_S^2)}{(C_A^2 + C_S^2).(V_z - C_T^2)}$$

Le cas qui nous intéresse est celui qui correspond à $m^2 > 0$, onde progressive transversale pour cela on a deux possibilités :

$$V_z > \text{MAX}(C_S, C_A) \quad \text{et} \quad C_T < V_z < \text{MIN}(C_S, C_A)$$

- $V_z > \text{MAX}(C_S, C_A)$ correspond aux ondes *fast* qui sont les plus rapides.
- $C_T < V_z < \text{MIN}(C_S, C_A)$ correspond aux ondes *slow* qui sont les moins rapides.

Les deux types d'ondes qui se propagent sont les ondes Magnéto - Acoustique *fast* et *slow*.

2.5.2-Relation de dispersion des ondes Magnéto - Acoustique *fast* et *slow* :

Supposons maintenant que la solution $\Delta = \vec{\nabla} \vec{V}$ de l'équation de Lighthil (2.45) est sous la forme : $\Delta = i.Q. \exp\{-i(\omega t - \vec{k} \vec{r})\}$ avec Q une constante et représente l'amplitude de l'onde (le terme de la dérivé est inclus).

En remplaçant le tous dans l'équation (2.62), avec $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ et en posant aussi que $k_z = k. \cos \theta$ avec θ est l'angle entre la direction de la vitesse de phase (direction de k) et la direction du champ magnétique $o\vec{z}$, on obtient :

$$\omega^4 - \omega^2(C_A^2 + C_S^2).k^2 + C_A^2.C_S^2.k^4.\cos^2 \theta = 0 \quad (2.48)$$

en cherchant les solutions qui annulent l'équation (2.48), on trouve **la vitesse de phase** :

$$V_+^2 = \frac{1}{2} \left(C_A^2 + C_S^2 + \sqrt{(C_A^2 + C_S^2)^2 - 4.C_A^2.C_S^2.\cos^2 \theta} \right) \quad (2.49)$$

$$V_-^2 = \frac{1}{2} \left(C_A^2 + C_S^2 - \sqrt{(C_A^2 + C_S^2)^2 - 4.C_A^2.C_S^2.\cos^2 \theta} \right)$$

on peut dire que V_+ correspond au mode *fast* et V_- au mode *slow*.

Discussion :

Nous avons le mode *fast* :

$$V_+^2 = \frac{1}{2} \left(C_A^2 + C_S^2 + \sqrt{(C_A^2 + C_S^2)^2 - 4.C_A^2.C_S^2.\cos^2 \theta} \right) :$$

- $\theta = \pi/2$ nous avons $V_+^{\text{MAX}} = (C_A^2 + C_S^2)^{1/2}$
- $\theta = 0$ nous avons $V_+^{\text{MIN}} = \text{MAX}(C_A, C_S)$

Le mode slow :

$$V_-^2 = \frac{1}{2} \left(C_A^2 + C_S^2 - \sqrt{(C_A^2 + C_S^2)^2 - 4 C_A^2 C_S^2 \cos^2 \theta} \right)$$

- $\theta = \pi/2$ nous avons $V_-^{\text{MIN}} = 0$
- $\theta = 0$ nous avons $V_-^{\text{MAX}} = \text{MIN}(C_A, C_S)$

donc les vitesses de phase pour les deux modes *fast* et *slow* satisfont les inégalités suivantes :

- mode *fast* : $\text{MAX}(C_A, C_S) < V < (C_A^2 + C_S^2)^{1/2}$ pour $0 < \theta < \pi/2$
- mode *slow* : $0 < V < \text{MIN}(C_A, C_S)$ pour $\pi/2 > \theta > 0$

on pose $C_F = (C_A^2 + C_S^2)^{1/2}$ est la vitesse *fast*.

on discute deux cas intéressants, avec $\beta \approx \frac{C_A}{C_S}$:

1- $C_A > C_S$, $\beta > 1$:

- mode *fast* : $C_A < V < C_F$ pour $0 < \theta < \pi/2$
- mode *slow* : $0 < V < C_S$ pour $\pi/2 > \theta > 0$

2- $C_S > C_A$, $\beta < 1$:

- mode *fast* : $C_S < V < C_F$ pour $0 < \theta < \pi/2$
- mode *slow* : $0 < V < C_A$ pour $\pi/2 > \theta > 0$

Concernant le mode d'Alfven, c'est le même pour les deux cas, on a $C_A \gg C_S$:

$$0 < V < C_A \quad \text{pour} \quad \pi/2 > \theta > 0$$

Les figures (2.2) et (2.3) représentent le diagramme du vecteur vitesse de phase V en fonction de la direction de la propagation θ en coordonnées polaires, et ceci dans les deux cas $\beta > 1$ et $\beta < 1$.

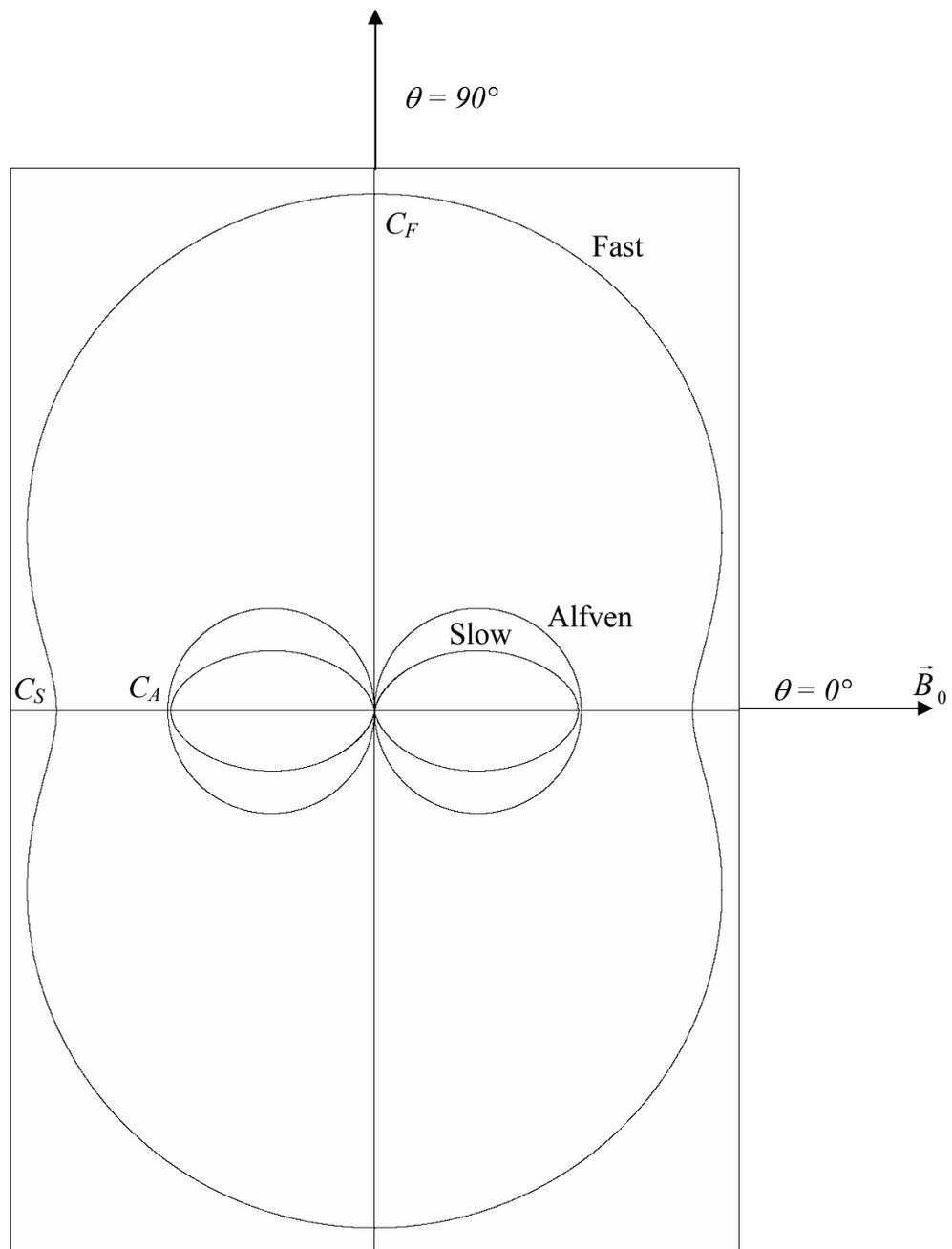


Figure 2.2 : Le diagramme du vecteur vitesse de phase V en fonction de la direction l'angle θ en coordonnées polaires, et ceci dans le cas $\beta < 1$

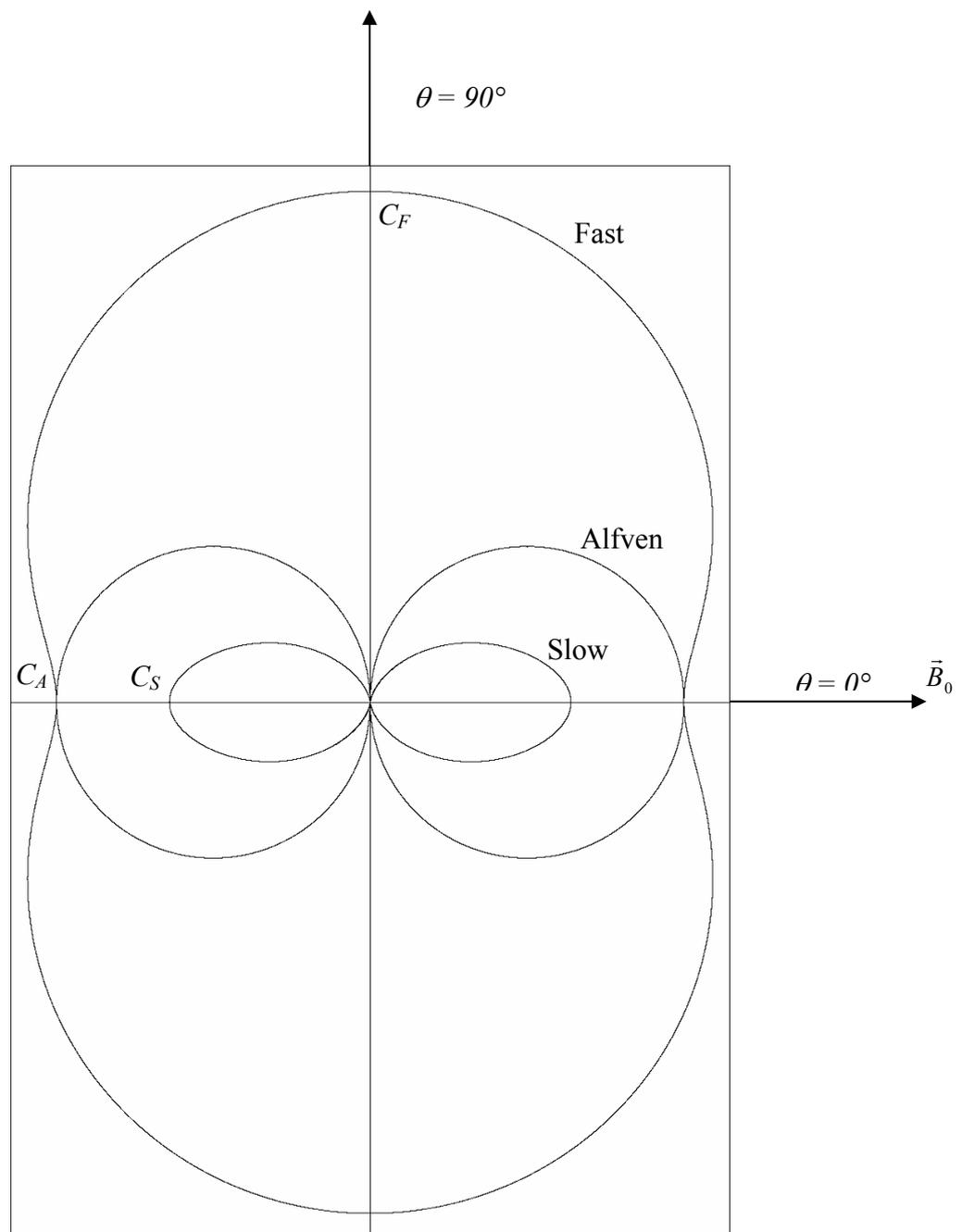


Figure 2.3 : Le diagramme du vecteur vitesse de phase V en fonction de la direction l'angle θ en coordonnées polaires, et ceci dans le cas $\beta > 1$

On peut faire la même chose pour la vitesse de phase longitudinale V_z , ainsi que transversale

V_{\perp} , il suffit de remplacer $V_z = \frac{V}{\cos \theta}$ et $V_{\perp} = \frac{V}{\sin \theta}$ dans l'équation (2.49), on obtient :

$$V_{z\pm}^2 = \frac{1}{2} \frac{\left(C_A^2 + C_S^2 \pm \sqrt{(C_A^2 + C_S^2)^2 - 4 C_A^2 C_S^2 \cos^2 \theta} \right)}{\cos \theta}$$

$$V_{\perp\pm}^2 = \frac{1}{2} \frac{\left(C_A^2 + C_S^2 \pm \sqrt{(C_A^2 + C_S^2)^2 - 4 C_A^2 C_S^2 \cos^2 \theta} \right)}{\sin \theta}$$

Vitesse de groupe :

D'après l'équation (2.49), nous avons trouvé que :

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{(C_A^2 + C_S^2) k^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{k^4 (C_A^2 + C_S^2)^2 - 4 C_A^2 C_S^2 k^4 \cos^2 \theta} \quad (2.50)$$

avec $\cos \theta = \frac{k_z}{k}$, $C_T^2 = \frac{C_A^2 C_S^2}{C_A^2 + C_S^2}$ et $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$:

La vitesse de groupe est définie comme :

$$\vec{C}_g = \vec{\nabla}_k \omega = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \vec{e}_x + \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \vec{e}_y + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \vec{e}_z$$

avec $C_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k_x}$, $C_{gy} = \frac{\partial \omega}{\partial k_y}$, $C_{gz} = \frac{\partial \omega}{\partial k_z}$

en faisant les dérivées successives de l'équation (2.50) on trouve :

$$C_{gx\pm} = \frac{(C_A^2 + C_S^2)}{2} \frac{k_x}{\omega_{\pm}} \left[1 \pm \left(k^2 - \frac{2 C_T^2 k_z^2}{C_A^2 + C_S^2} \right) \left(k^4 - \frac{4 C_T^2}{C_A^2 + C_S^2} k_z^2 k^2 \right)^{-1/2} \right]$$

$$C_{gy\pm} = \frac{(C_A^2 + C_S^2)}{2} \frac{k_y}{\omega_{\pm}} \left[1 \pm \left(k^2 - \frac{2 C_T^2 k_z^2}{C_A^2 + C_S^2} \right) \left(k^4 - \frac{4 C_T^2}{C_A^2 + C_S^2} k_z^2 k^2 \right)^{-1/2} \right]$$

$$C_{gz\pm} = \frac{(C_A^2 + C_S^2)}{2} \frac{k_z}{\omega_{\pm}} \left[1 \pm \left(k^2 - \frac{2 C_T^2 (k_z^2 + k^2)}{C_A^2 + C_S^2} \right) \left(k^4 - \frac{4 C_T^2}{C_A^2 + C_S^2} k_z^2 k^2 \right)^{-1/2} \right]$$

avec $k_z = k \cos \theta$, le tracé du diagramme du vecteur vitesse de groupe en fonction de l'angle θ nous donne les résultats suivants :

1- $\beta \ll 1$:

- mode *fast* : $V_g = \max(C_S, C_A) = C_S$ c'est le mode acoustique.
- mode *slow* : $V_g = \min(C_S, C_A) = C_A$ c'est le mode d'Alfvén.

2- $\beta \gg 1$:

ça ne correspond ni au mode d'Alfvén pur, ni au mode acoustique pur :

- mode *fast* : $V_g = C_A \frac{k}{|k|}$ c'est le mode Alfvén compressé.
- mode *slow* : $V_g = C_S \frac{B_0}{|B_0|}$ c'est le mode acoustique d'Alfvén.

Étudions à présent une caractéristique très importante de ces ondes, leur nature, pour cela, cherchons d'abord la forme analytique des perturbations :

Nous avons les équations linéarisées des perturbations pour un fluide homogène, en absence de gravitation, avec P_0, ρ_0 et B_0 sont des constantes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \tag{2.51}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P + \frac{1}{4\pi} \vec{B}_0 \vec{\nabla} \vec{B} - \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} (\vec{B}_0 \cdot \vec{B}) \tag{2.52}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{B}_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + (\vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = C_S^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.54}$$

À partir de ces dernières, avec Q est toujours l'amplitude et $f = \exp\{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\}$, on retrouve les perturbations (Abdelatif, 1985) :

$$V_x = \frac{k_x}{\omega^2} \frac{(C_S^2 + C_A^2) \cdot (\omega^2 - k_z^2 C_T^2)}{(\omega^2 - C_A^2 k_z^2)} Q f \tag{2.55}$$

$$V_y = \frac{k_y}{\omega^2} \frac{(C_S^2 + C_A^2) \cdot (\omega^2 - k_z^2 C_T^2)}{(\omega^2 - C_A^2 k_z^2)} Q f \tag{2.56}$$

$$V_z = \frac{C_S^2 k_z}{\omega^2} Q f \quad (2.57)$$

$$B_x = \frac{-k_x k_z}{\omega^3} \frac{(C_S^2 + C_A^2)(\omega^2 - k_z^2 C_T^2)}{(\omega^2 - C_A^2 k_z^2)} Q f B_0 \quad (2.58)$$

$$B_y = \frac{-k_y k_z}{\omega^3} \frac{(C_S^2 + C_A^2)(\omega^2 - k_z^2 C_T^2)}{(\omega^2 - C_A^2 k_z^2)} Q f B_0 \quad (2.59)$$

$$B_z = \frac{(\omega^2 - k_z^2 C_S^2)}{\omega^3} Q f B_0 \quad (2.60)$$

A partir de ces dernières équations, nous avons :

$$\frac{B_x}{B_y} = \frac{V_x}{V_y} = \frac{k_x}{k_y}$$

de même , en faisant le rapport des vitesses de groupe déjà calculées, on trouve :

$$\frac{C_{gx}}{C_{gy}} = \frac{k_x}{k_y}$$

et donc $\frac{B_x}{B_y} = \frac{V_x}{V_y} = \frac{C_{gx}}{C_{gy}} = \frac{k_x}{k_y} = \text{constante.}$

Ceci nous amène à une conclusion importante : $\vec{k}_\perp // \vec{B}_\perp // \vec{V}_\perp // \vec{C}_{g\perp}$

Le vecteur perturbation de vitesse, perturbation du champ magnétique et vitesse de groupe et de phase sont tous dans un même plan qui contient aussi k_\perp et k .

Ce résultat va nous permettre de définir l'angle Θ , angle compris entre le vecteur perturbation de vitesse \vec{V} et le vecteur d'onde \vec{k} .

Soit Θ_1 angle entre \vec{V} et l'axe $o\vec{z}$, Θ_2 angle entre \vec{k} et l'axe $o\vec{z}$, et donc

$$\Theta = \Theta_1 - \Theta_2 .$$

Les composantes de \vec{V} et \vec{k} sont réduites à leurs composantes perpendiculaires dans le

plan de l'angle Θ , ainsi $\text{tg } \Theta_1 = \frac{V_\perp}{V_z}$ et $\text{tg } \Theta_2 = \frac{k_\perp}{k_z}$.

$$\text{tg } \Theta = \text{tg } (\Theta_1 - \Theta_2) = \frac{\frac{V_\perp}{V_z} - \frac{k_\perp}{k_z}}{1 + \frac{V_\perp}{V_z} \cdot \frac{k_\perp}{k_z}} \quad (2.61)$$

$$\text{or } \frac{V_{\perp}}{V_z} = \frac{V_y}{V_z} = \frac{k_{\perp}}{k_z} \frac{C_S^2 + C_A^2}{C_S^2} \frac{\omega^2 - k_z^2 C_T^2}{\omega^2 - k_z^2 C_A^2}, \quad k_{\perp} = \frac{\omega}{V_{\perp}}, \quad k_z = \frac{\omega}{V_z}$$

en remplaçant dans l'équation (2.61) et après simplifications on trouve :

$$\text{tg } \Theta = \frac{C_S^2}{V_z \cdot V_{\perp}} \left(\frac{C_S^2 + C_A^2}{C_S^2} \frac{V_z^2 - C_T^2}{V_z^2 - C_A^2} - 1 \right) \quad (2.62)$$

on peut réécrire l'équation (2.62) en fonction de la vitesse longitudinale adimensionnelle

$v = \frac{V_z}{C_S}$ et du rapport β qui vaut $\frac{C_A}{C_S}$, l'équation (2.62) est réduite à :

$$\text{tg } \Theta = \frac{1}{v^2 \text{tg } \theta} \left[-1 + \left((\beta^2 + 1) \frac{v^2 - \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}}{v^2 - \beta^2} \right) \right]$$

d'où finalement :

$$\Theta = \arctg \left[\frac{1}{v^2 \text{tg } \theta} \left(-1 + \left((\beta^2 + 1) \frac{v^2 - \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}}{v^2 - \beta^2} \right) \right) \right] \quad (2.63)$$

Les figures (2.4), (2.5) et (2.6) montrent le tracé de surface en 3 dimensions de l'équation (2.63), elles représentent la variation de l'angle Θ en fonction de la vitesse longitudinale adimensionnelle $v = \frac{V_z}{C_S}$ et du rapport β .

Le graphe délimité par la région $\frac{V_z}{C_S} > 1$ correspond au mode *fast* $V_z > C_S$, alors que celui délimité par la région $\frac{V_z}{C_S} < 1$ correspond au mode *slow* $V_z < C_S$.

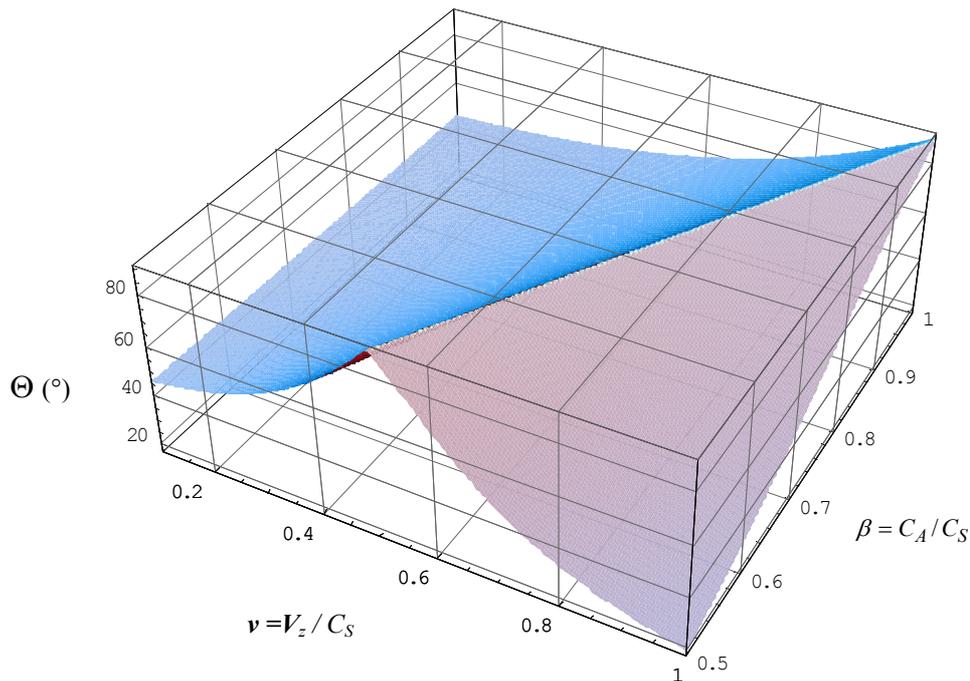


Figure 2.4 : L'angle Θ pour le mode *slow* et pour les $\beta < 1$

La figure (2.4) représente l'angle Θ pour le mode *slow* et pour les $\beta < 1$, on remarque que la plupart des angles Θ du mode *slow* sont supérieurs à 45° , ce qui nous amène à conclure que le mode *slow* est majoritairement transversal ($\Theta = 90^\circ$), c'est un mode d'Alfven pur.

Pour $\beta > 1$, et pour le mode *slow*, l'équation (2.63) devient :

$$\Theta = \arctg \left[-\frac{1}{v^2} \right]$$

dans ce cas, et comme le montre la figure (2.5), le mode *slow* est majoritairement transversal et tend vers une nature longitudinale, donc un couplage de plus en plus croissant.

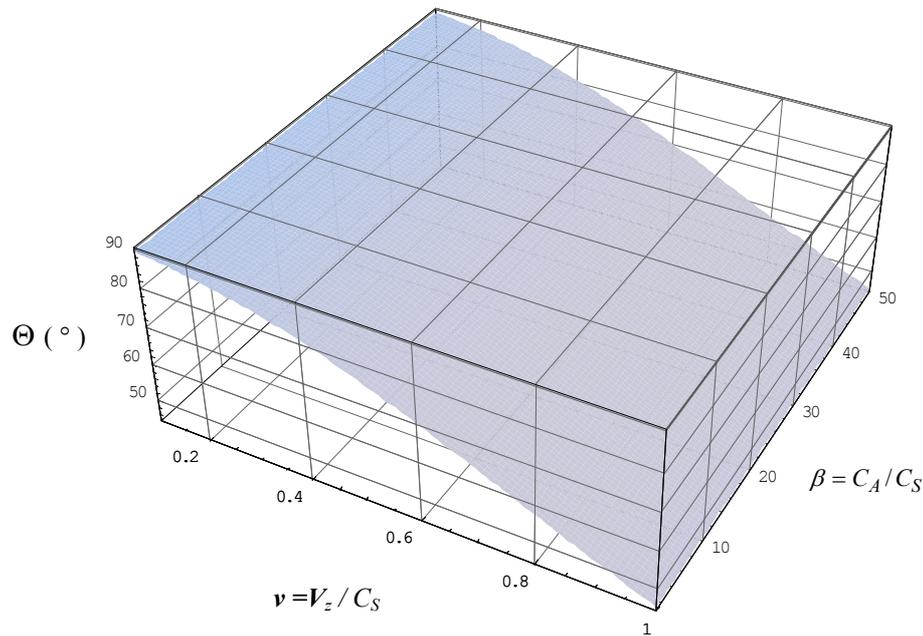


Figure 2.5 : L'angle Θ pour le mode *slow* et pour les $\beta > 1$

Pour le mode *fast*, et dans le cas $\beta > 1$, l'équation (2.63) devient :

$$\Theta = \arctg \left[\frac{1}{v^2} \left(-1 + \left(\frac{v^2 \beta^2}{v^2 - \beta^2} \right) \right) \right] \quad (2.64)$$

La figure (2.6) représente le tracé de l'équation (2.64), cette dernière montre que l'angle Θ varie de 0° à 90° , dans ce cas, le couplage est assez puissant.

Pour $\beta < 1$, le mode *fast* devient un mode purement longitudinal ($\Theta = 0^\circ$), donc un mode acoustique pur.

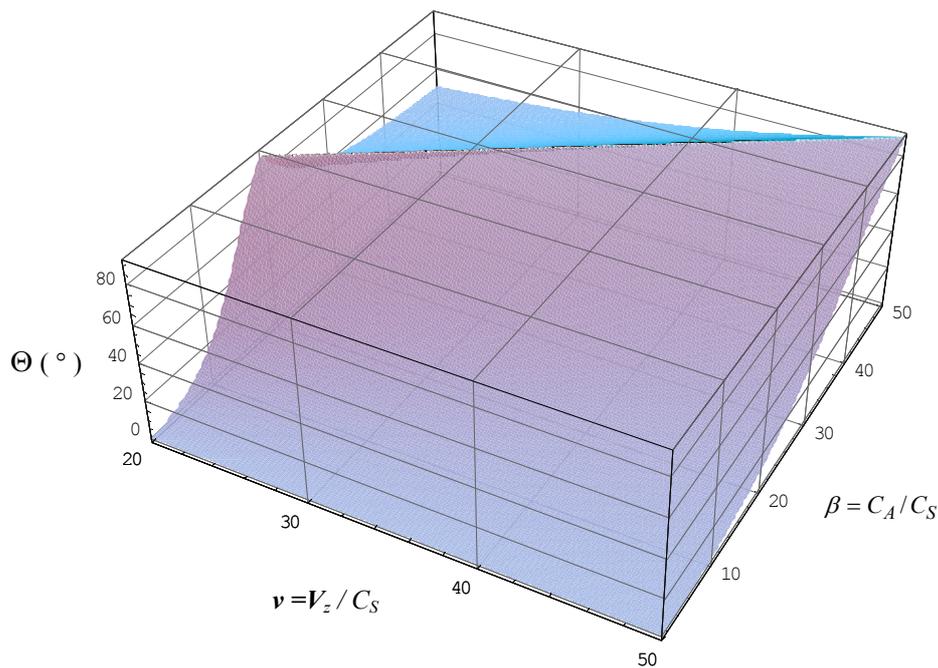


Figure 2.6 : L'angle Θ pour le mode *fast* et pour les $\beta > 1$

2.6-Conclusion :

- Lorsque $\beta \rightarrow 0$, la force de pression se découple de la force de Lorentz, on obtient ainsi un mode transversal, le *mode d'Alfven pur*, et un mode longitudinal correspond à un *mode acoustique pur*.
- Lorsque $\beta \rightarrow \infty$, la force de pression se couple fortement avec la force de Lorentz, un des modes obtenus est appelé *le mode Alfven compressible*, il correspond au mode magnéto-acoustique *fast* pour $\beta \rightarrow \infty$, avec une vitesse égale à la vitesse d'Alfven, l'autre mode est *le mode acoustique d'Alfven*, il correspond au mode magnéto acoustique *slow* pour $\beta \rightarrow \infty$, avec une vitesse égale à la vitesse acoustique.

Le tableau (2.1) résume l'essentiel des caractéristiques obtenues des ondes magnéto-acoustiques :

	$\beta \rightarrow 0$		$\beta \rightarrow \infty$	
	Le Mode Fast	Le mode Slow	Le Mode Fast	Le Mode Slow
Vitesse du groupe	$C_S k/ k $	$C_A B_0/ B_0 $	$C_A k/ k $	$C_S B_0/ B_0 $
Nature de l'onde	Longitudinale	Transversale	Long \rightarrow Trans	Trans \rightarrow Long
Le Mode	Mode Acoustique	Mode d'Alfven	Le Mode Alfven Compressible	Le Mode Acoustique d'Alfven

Tableau 2.1

3.1-Introduction :

L'oscillation de la surface solaire non magnétique, appelée par le mode P , est probablement excitée par les émissions acoustiques qui provient du mouvement turbulent du fluide associé à la zone de convection, celle ci occupe 30% de l'enveloppe solaire, ce mode se comporte comme une source importante d'énergie, ainsi, il stabilise et soutient les oscillations qui existent au niveau de l'ombre des taches solaires, et aussi il guide les ondes qui s'échappent vers l'atmosphère solaire.

La figure (3.1) montre un spectre à deux dimensions de la vitesse doppler de la surface solaire en fonction du degré harmonique ℓ et la fréquence temporelle ν . Le spectre n'est pas constitué de courbes lisses mais au contraire on voit des pics bien marqués. Ils correspondent à des modes résonnants. Les modes ayant la plus grande amplitude correspondent à des périodes de l'ordre de 5 minutes.

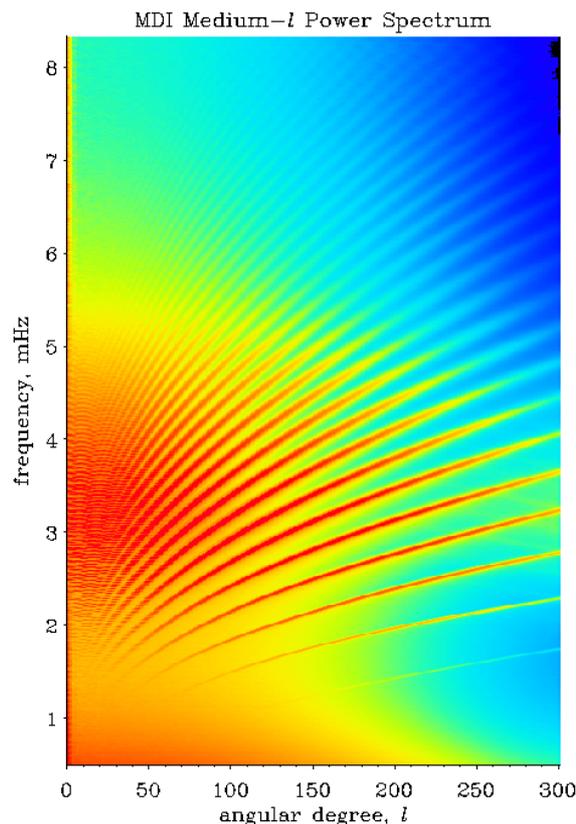


Figure 3.1 : Spectre de dispersion des modes P (fréquence temporelle en fonction du degré) obtenu par la transformation de Fourier temporelle des séries temporelles d'images (Instrument : MDI au bout d'un an d'observation)

Les observations des taches solaires ont montrées deux phénomènes majeurs :

- 1)- L'absorption des modes P par les taches solaires, se manifeste par un déficit de l'énergie du flux sortant par rapport au flux entrant du mode P -figure 3.2- (Braun, Duvall, et Labonte, 1987, 1988,1990 ; Braun ,1995 ; Zhang 1997 ; Bogdan et al, 1993). Ceci a été mis en évidence par une technique très importante en observation solaire, celle du *décalage Doppler* (Abdelatif et al.1984) et plus récemment le décalage doppler par *holographie acoustique* (Lindsey et Braun, 1999, 2000) ou encore *time- distance Helioseismology* (Kosovitchev et al. 2000)
- 2)- Décroissement de la fréquence des modes P avec le maximum de l'activité du soleil.

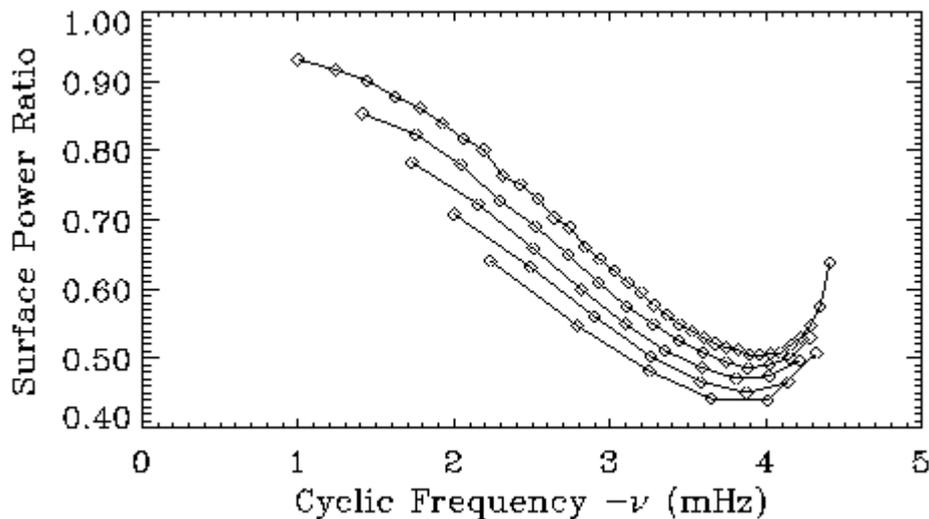


Figure 3.2 : Le rapport de puissance de la vitesse superficielle entre une atmosphère non magnétiques et une autre avec un champ magnétique uniforme d'une intensité de 595 G. Les cinq courbes solides correspondent à différentes valeurs du nombre harmonique sphérique entre 100 et 500. (Hight Altitude Observatory)

Diffèrent mécanismes physiques ont été proposés afin d'expliquer cette absorption :

- 1-Absorption résonante (Hollweg, 1988 ; Sakurai, Goossens, et Hollweg,1991 ;Rosenthal,1990,1992).
- 2-Conversion P à Slow mode (Spruit, 1991 ; Spruit et Bogdan, 1992 ; Cally et Bogdan, 1993 ; Cally, Bogdan, et Zweibel, 1994 ; Cally, 2001).
- 3-Cascades d'énergie (Cally, 1991 ; Cally et Maddison, 1997).

Dans ce chapitre, on va présenter le modèle d'une atmosphère polytrophe et stratifiée, puis on va dériver les formules et les équations de base qui réagissent ce milieu, on va résoudre

ces équations dans le cas particulier, celui d'une atmosphère non magnétique et faiblement magnétique, discuter les solutions obtenues, et enfin, obtenir la relation de dispersion et tracer son diagramme pour ce cas précis, on va comparer entre cette atmosphère et celle isotherme stratifiée et non magnétique, et on terminera avec l'interprétation des résultats obtenus avec la conclusion.

3.2-Le modèle :

La profondeur d'une tache solaire au niveau de la couche de convection ne présente qu'une très petite fraction du rayon de l'étoile, dans ce cas bien précis, il en résulte une simplification intéressante de l'atmosphère :

- La courbure de l'atmosphère est négligée.
- La pesanteur est considérée comme constante.
- L'atmosphère ne participe pas à la « production » d'énergie de l'étoile, elle ne fait que transmettre ou transforme celle-ci vers l'extérieure à partir des zones internes.
- Généralement, la force centrifuge équatoriale est faible devant la force de gravité locale dans cette même région, on peut négliger le mouvement de rotation, on peut de la même manière ignorer l'effet de marées gravitationnelles causé par les planètes.

Le modèle de base qu'on va utiliser est identique à celui de Cally et Bogdan (1993), celui d'une atmosphère polytrophe qui représente la zone de convection.

Cette atmosphère est traversée par un champ magnétique uniforme et vertical à la surface, en coordonnées cartésiennes, il s'écrit comme :

$$\vec{B} = B \vec{e}_z$$

L'atmosphère considérée est stratifiée, et pour une tache solaire, on considère que cette portion d'atmosphère est soumise à l'effet d'un champ uniforme de gravitation :

$$\vec{g} = -g \vec{e}_z$$

On suppose que la surface de l'atmosphère se situe à $z = 0$, et le fluide idéal qui compose le soleil est dans la région $z < 0$ (figure 3.3) :

Dans ce milieu, la densité $\rho(z)$ et la pression du gaz $P(z)$ varient comme :

$$\rho(z) = \rho_0 \left(\frac{-z}{z_0} \right)^m \tag{3.1}$$

$$P(z) = \frac{\rho_0 g z_0}{m+1} \left(\frac{-z}{z_0} \right)^{m+1} = P_0 \left(\frac{-z}{z_0} \right)^{m+1} \quad (3.2)$$

où m est l'indice polytropique avec $m = 1/(\gamma-1)$, γ étant le rapport des chaleurs spécifiques $\gamma = C_P / C_V$.

En considérant que le Soleil est composé de molécules monoatomiques H_2 , dans ce cas, $m = 3/2$, $\gamma = 5/3$.

ρ_0 est la densité à l'équilibre, z_0 est une hauteur de référence qui correspond à ρ_0 et P_0 , on considère que l'état d'équilibre correspond à une entropie constante. La pression et la densité tendront vers zéro au niveau de la surface $z = 0$.

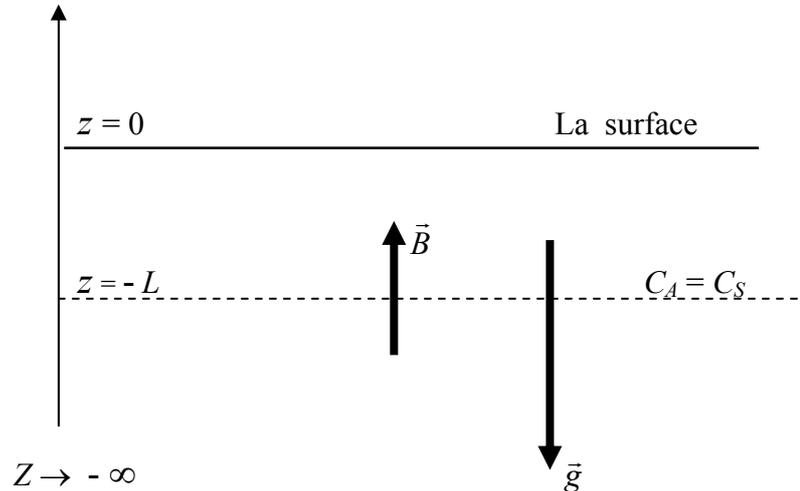


Figure 3.3: Schéma du modèle atmosphérique étudié

L'expression de la densité s'obtient comme suit :

A partir de l'équation d'état, nous avons la lois d'état différentie qui est donnée par

$$\frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T}$$

la variation de l'entropie est donnée par

$$dS = C_V \frac{dP}{P} - C_P \frac{d\rho}{\rho}$$

A l'équilibre hydrostatique, nous avons $dS = 0$, de la dernière équation on fait sortir

l'expression $\frac{dP}{P}$ et on la remplace dans la lois d'état différentie, on trouve :

$$(\gamma - 1) \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T} \quad \text{avec} \quad (\gamma - 1) = \frac{1}{m}$$

Dans une atmosphère polytrophe, nous avons $T \propto z$, donc $\frac{dT}{T} \approx -\frac{dz}{z}$ ($z < 0$) :

$$\frac{1}{m} \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dz}{z}$$

L'intégration de la dernière équation nous donne l'expression de la densité

$$\rho(z) = \rho_0 \left(\frac{-z}{z_0} \right)^m$$

La condition d'équilibre hydrostatique est donnée par l'équation :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(z) \cdot g$$

en substituant l'expression de $\rho(z)$ obtenue dans la dernière équation, et en intégrant, nous retrouvons le profile de la pression :

$$P(z) = \frac{\rho_0 g z_0}{m+1} \left(\frac{-z}{z_0} \right)^{m+1} = P_0 \left(\frac{-z}{z_0} \right)^{m+1} \quad (3.3)$$

d'un autre coté, la vitesse du son est donnée par :

$$C_s^2 = \gamma \frac{P(z)}{\rho(z)} \quad (3.4)$$

En remplaçant les expressions de (3.1) et (3.2) dans (3.4), et en substituant l'expression de γ

qui vaut $\gamma = \frac{m+1}{m}$, on retrouve l'expression de la vitesse adiabatique du son :

$$C_s(z) = \left(\frac{g |z|}{m} \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

Nous avons déjà introduit dans le chapitre2 la vitesse d'Alfven qui est donnée par :

$$C_A^2 = \frac{B^2}{4\pi \rho(z)} \quad (3.6)$$

On définit une autre hauteur de référence, $z = -L$, c'est la profondeur caractéristique pour laquelle on a l'égalité entre la vitesse d'Alfven et la vitesse acoustique : $C_A(L) = C_S(L)$

(Figure 3.4)

À partir des équations (3.1), (3.5) et (3.6), on retrouve l'expression de la vitesse d'Alfven :

$$C_A(z) = \left(\frac{g L}{m} \right)^{1/2} \left(\frac{L}{|z|} \right)^{m/2} \quad (3.7)$$

En réalité, on peut écrire l'expression des deux vitesses sous la forme adimensionnelle suivante :

$$C_S \left(\frac{m}{g L} \right)^{1/2} = \tau^{1/2} \quad \text{et} \quad C_A \left(\frac{m}{g L} \right)^{1/2} = \tau^{-m/2} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{z}{L}$$

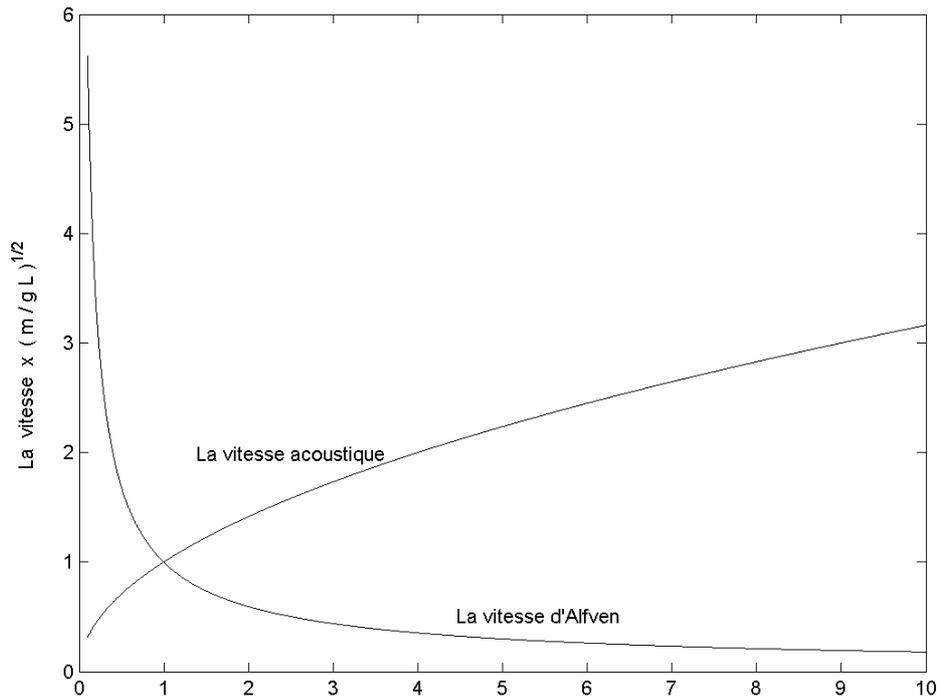


Figure 3.4 : Variation des vitesses adimensionnelles d'Alfven et du son en fonction du rapport z/L , le point d'intersection des deux courbes ($z = -L$) correspond à $C_A = C_S$

La courbe des deux vitesses adimensionnelles est représentée dans la Figure (3.4), lorsque L est très petit ($L \rightarrow 0$), la valeur de τ augmente, et donc la vitesse du son est beaucoup plus grande que celle d'Alfven, on peut dire que cette atmosphère est non magnétique.

Lorsque L augmente ($L \rightarrow \infty$), la valeur de τ diminue, la vitesse d'Alfven devient plus grande que celle du son, c'est ce qui caractérise une atmosphère magnétique.

Nous avons les équations MAG qui gouvernent notre fluide soumis au champ magnétique \vec{B} et au champ de gravitation \vec{g} :

$$\left(\omega^2 - k^2 (C_S^2 + C_A^2) + C_A^2 \frac{d^2}{dz^2} \right) U_x = -ik \left(-g + C_S^2 \frac{d}{dz} \right) U_z \quad (3.8)$$

$$\left(C_S^2 \frac{d^2}{dz^2} - \gamma g \frac{d}{dz} + \omega^2 \right) U_z = -ik \left(C_S^2 \frac{d}{dz} - (\gamma - 1)g \right) U_x \quad (3.9)$$

avec le vecteur vitesse $\vec{U} = U_x \vec{e}_x + U_z \vec{e}_z$.

Afin d'avoir des variables adimensionnelles, on pose les changements de variables suivant, avec toujours $z < 0$:

$$\zeta = -2kz \quad , \quad \chi = 2kL \quad , \quad \Omega^2 = \frac{m\omega^2}{2kg}$$

en supposant aussi qu'il existe des potentiels de vitesse ϕ et ψ , on peut écrire donc :

$$U_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad , \quad U_x = \frac{\partial (\psi + \phi)}{\partial x}$$

Généralement, on peut écrire les fonctions ϕ et ψ sous la forme :

$$\phi \approx e^{ikx} f(z) \quad \text{et} \quad \psi \approx e^{ikx} g(z)$$

ce qui donne :

$$U_z = -2k \frac{d\phi}{d\zeta} \quad , \quad U_x = ik(\phi + \psi)$$

ainsi que pour les vitesses (3.4) et (3.7) :

$$C_S^2 = \frac{g}{2km} \zeta \quad , \quad C_A^2 = \frac{g}{2km} \chi^{m+1} \zeta^{-m}$$

En remplaçant ces derniers changements dans les équations MAG (3.8) et (3.9), et après simplification (voir appendice 1), on obtient le système :

$$\frac{d^2 \phi}{d\zeta^2} + \frac{m}{\zeta} \frac{d\phi}{d\zeta} + \left(\frac{\Omega^2}{\zeta} - \frac{1}{4} \right) \phi = \frac{1}{4} \psi \quad (3.10)$$

$$\chi^{m+1} \frac{d^2 \psi}{d\zeta^2} + \Omega^2 \zeta^m \psi = \frac{-\chi^{m+1}}{4k^2} \alpha \quad (3.11)$$

avec la divergence de la vitesse $\alpha = \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \frac{-4k^2}{\zeta} \left(m \frac{d\phi}{d\zeta} + \Omega^2 \phi \right)$

3.3-Etude sommaire des solutions :

Dans la suite de notre travail, c'est la valeur de χ qui va définir une atmosphère magnétique ou non magnétique. Dans la limite non magnétique, on a $L \rightarrow 0$, et donc $\chi \rightarrow 0$.

Commençons d'abord par $\chi = 0$, on est dans le cas d'une atmosphère non magnétique, à partir de l'équation (3.11), on a

$$\Omega^2 \zeta^m \psi = 0 \quad \text{d'où} \quad \psi = 0 \quad (3.12)$$

l'équation (3.10) nous donne donc :

$$\frac{d^2 \phi}{d\zeta^2} + \frac{m}{\zeta} \frac{d\phi}{d\zeta} + \left(\frac{\Omega^2}{\zeta} - \frac{1}{4} \right) \phi = 0 \quad (3.13)$$

Nous avons dit en introduction qu'une atmosphère non magnétique est caractérisée par une oscillation acoustique connue par le mode P , l'équation (3.13) représente bien ce type de mode.

Dans cette atmosphère, le mode magnétique n'existe pas, ceci reflète aussi le résultat obtenu :

$$\psi = 0$$

Ceci nous amène à une conclusion très importante, c'est que le membre gauche de l'équation (3.10) génère le mode non magnétique P (Spruit et Bogdan, 1992). On peut réécrire l'équation (3.10) sous la forme :

$$P[\phi] \equiv \frac{d^2 \phi}{d\zeta^2} + \frac{m}{\zeta} \frac{d\phi}{d\zeta} + \left(\frac{\Omega^2}{\zeta} - \frac{1}{4} \right) \phi = \frac{1}{4} \psi \quad (3.14)$$

Le cas $\chi \rightarrow 0$ est une limite singulière, on peut utilisé donc l'équation (3.11). Pour $\zeta \rightarrow \infty$,

le terme de couplage $\alpha = \frac{-4k^2}{\zeta} \left(m \frac{d\phi}{d\zeta} + \Omega^2 \phi \right)$ tend vers zéro (la fonction ϕ est bornée pour

$\zeta \rightarrow \infty$)

L'équation (3.11) se réduit à :

$$\frac{d^2\psi}{d\zeta^2} + \frac{\Omega^2}{\chi^{m+1}} \zeta^m \psi \approx 0 \quad (3.15)$$

L'équation (3.15) est sous forme d'équation différentielle de Bessel :

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \lambda^2 z^{p-2} w = 0 \quad (3.16)$$

avec $\lambda = \frac{\Omega}{\chi^{(m+1)/2}}$, $p = m + 2$, $z \equiv \zeta$

la solution de ce type d'équation est donnée par :

$$w = z^{1/2} \varphi_{1/p} \left(\frac{2 \lambda z^{p/2}}{p} \right) \quad (3.17)$$

φ étant une combinaison des fonctions de Bessel.

Donc on peut écrire la solution sous cette forme :

$$\psi(\zeta) = \zeta^{1/2} \varphi_{1/m+2} \left(\frac{2 \Omega}{m+2} \chi^{-(m+1)/2} \zeta^{(m+2)/2} \right)$$

Parmi les fonctions de Bessel, la fonction de Hankel H_ν est la solution physique, car pour $x \rightarrow \infty$, $H_\nu(x) \rightarrow 0$

avec $H_\nu(x) = (1/x) \exp.(i x - \nu \pi/2)$

d'où finalement :

$$\psi(\zeta) \approx \frac{m+2}{2\Omega} \chi^{(m+1)/2} \zeta^{-(m+1)/2} \exp \left(i \frac{2\Omega}{m+2} \chi^{-(m+1)/2} \zeta^{(m+2)/2} \right) \quad (3.18)$$

$$\zeta \rightarrow \infty$$

Cette solution dépend de χ , c'est la solution pour une atmosphère faiblement magnétique, on peut dire que cette dernière correspond à un autre type de solution, c'est le mode S , par conséquent, le membre gauche de l'équation (3.11) génère le mode magnétique slow transversal S (Spruit et Bogdan, 1992), on peut la réécrire sous la forme :

$$S[\psi] \equiv \chi^{m+1} \frac{d^2\psi}{d\zeta^2} + \Omega^2 \zeta^m \psi = \frac{-\chi^{m+1}}{4k^2} \alpha \quad (3.19)$$

en conclusion :

$$P[\phi] \equiv \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} + \frac{m}{\zeta} \frac{d\phi}{d\zeta} + \left(\frac{\Omega^2}{\zeta} - \frac{1}{4} \right) \phi = \frac{1}{4} \psi \quad (3.20)$$

$$S[\psi] \equiv \chi^{m+1} \frac{d^2\psi}{d\zeta^2} + \Omega^2 \zeta^m \psi = \frac{-\chi^{m+1}}{4k^2} \alpha \quad (3.21)$$

avec P est l'opérateur qui génère le mode P pour un polytrophe non magnétique, et S est l'opérateur qui génère le mode transversal magnétique slow .

Pour χ très petit mais fini $\chi \ll \zeta$, les termes droits des équations (3.10) et (3.11) indiquent un faible couplage entre les deux modes P et S , la solution sera une superposition linéaire des modes P et S .

Un polytrophe magnétique $\chi \geq 10$, avec $0 < \zeta \leq \chi$ nous donne la possibilité de rendre les équations (3.20) et (3.21) bien couplées en posant :

$$\Psi = \phi + \psi \quad (3.22)$$

$$\phi = \phi \quad (3.23)$$

ce qui rend les équations (3.10) et (3.11) comme :

$$\frac{d^2\phi}{d\zeta^2} + \frac{m}{\zeta} \frac{d\phi}{d\zeta} + \frac{\Omega^2}{\zeta} \phi = \frac{1}{4} \Psi \quad (3.24)$$

$$\chi^{m+1} \left(\frac{d^2\Psi}{d\zeta^2} - \frac{1}{4} \Psi \right) = \Omega^2 \zeta^m (\phi - \Psi) \quad (3.25)$$

Les solutions sont détaillées dans le chapitre suivant, il sera consacré à l'étude des ondes Magnéto-Atmosphériques dans une atmosphère magnétique.

3.4-Relation de Dispersion d'un polytrophe non magnétique :

Dans le paragraphe précédent, et dans le cas d'un polytrophe non magnétique, l'équation (3.10) se réduit à cette équation :

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{m}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} + \frac{\Omega^2}{\zeta} - \frac{1}{4} \right) \phi = 0 \quad (3.26)$$

on peut vérifier que l'équation (3.26) peut se transformer en cette équation :

$$\zeta^{-m/2} \left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - \frac{1}{4} + \frac{\Omega^2}{\zeta} + \frac{\frac{m}{2} \left(1 - \frac{m}{2}\right)}{\zeta^2} \right) \zeta^{m/2} \phi = 0 \quad (3.27)$$

en posant $\Phi = \zeta^{m/2} \phi$ on peut écrire donc :

$$\frac{d^2 \Phi}{d\zeta^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\Omega^2}{\zeta} + \frac{\frac{m}{2} \left(1 - \frac{m}{2}\right)}{\zeta^2} \right) \Phi = 0 \quad (3.28)$$

Cette dernière est sous la forme de l'équation de Whittaker dont l'écriture est de la forme :

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{A}{z} + \frac{\left(\frac{1}{4} - B^2\right)}{z^2} \right) w = 0 \quad (3.29)$$

en comparant (3.28) et (3.29) on a :

$$A = \Omega^2 \quad \text{et} \quad B = \frac{m-1}{2} \quad \text{avec} \quad z \equiv \zeta$$

la solution de l'équation (3.29) est la fonction de Whittaker qui est sous la forme :

$$M_{A,B}(z) = e^{-z/2} z^{B+1/2} M\left(\frac{1}{2} + B - A, 1 + 2B, z\right) \quad (3.30)$$

avec $M(a, b, z)$ est la fonction de Kummer qui vaut :

$$M(a, b, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(b)}{\Gamma(a) \Gamma(b+n)} \frac{z^n}{n!}$$

$\Gamma(x)$ étant la fonction gamma.

donc l'équation (3.30) peut s'écrire comme :

$$\phi = M_{\Omega^2, \frac{m-1}{2}}(\zeta) = e^{-\zeta/2} M\left(\frac{m}{2} - \Omega^2, m, \zeta\right) \quad (3.31)$$

La fonction (3.31) est une solution physique acceptable si elle vérifie la condition au limite qui stipule que la fonction ϕ doit être borné à l'infinie, c'est-à-dire $\phi \rightarrow 0$ pour $\zeta \rightarrow \infty$.

La seule fonction qui correspond à cette condition est le polynôme de Laguerre, pour cela il faut que :

$$a = -n \quad \text{et} \quad \alpha = b - 1 \quad \text{avec } n \text{ un entier naturel.}$$

Ce qui revient à écrire :

$$\frac{m}{2} - \Omega^2 = -n \tag{3.32}$$

et $\alpha = m - 1$

$M\left(\frac{m}{2} - \Omega^2, m, \zeta\right)$ se réduit à un polynôme de degré n : $L_n^\alpha(\zeta)$ donné par

$$L_n^\alpha(\zeta) = \frac{(\Gamma(\alpha + n + 1))^2}{\Gamma(n + 1) \Gamma(\alpha + 1)} M(-n, \alpha + 1, \zeta)$$

la relation (3.32) nous donne la valeur propre :

$$\Omega_n^2 = n + \frac{m}{2} \tag{3.33}$$

pour $m = 3/2$ on a $\Omega_n^2 = n + \frac{3}{4}$ (3.34)

C'est la relation de dispersion pour un polytrophe non magnétique, elle représente les fréquences du mode acoustique standard P .

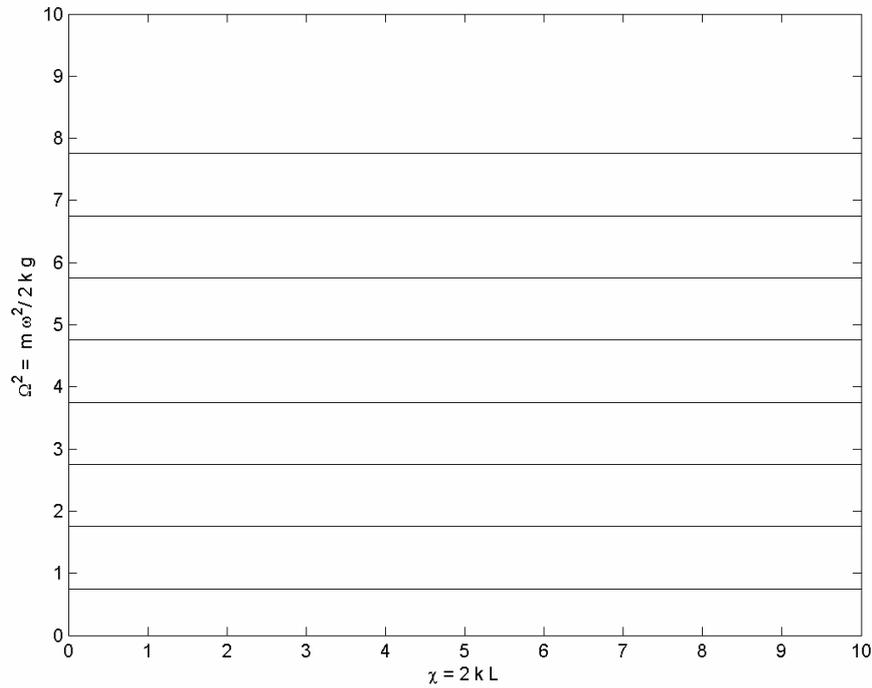


Figure 3.5: Courbe de dispersion des ondes dans un polytrophe non magnétique et les huit premiers modes P

La relation (3.34) peut s'écrire de différente manière, ainsi, on peut avoir différentes courbes de dispersion.

La figure (3.5) représente le tracé de la relation (3.34); la fréquence adimensionnel Ω^2 en fonction du vecteur d'onde adimensionnel χ .

Sachant que $\Omega^2 = \frac{m\omega^2}{2kg}$, on peut écrire l'équation (3.34) comme

$$\frac{m\omega^2}{2kg} = \left(n + \frac{3}{4}\right) \quad (3.35)$$

ou encore
$$\frac{m}{2kL} \omega^2 \frac{L}{g} = \left(n + \frac{3}{4}\right)$$

et donc
$$\omega^2 \frac{L}{g} = \left(n + \frac{3}{4}\right) \frac{2kL}{m} = \frac{2}{3} \left(n + \frac{3}{4}\right) \chi$$

d'où
$$\omega^2 \frac{L}{g} = \left(\frac{2}{3}n + \frac{1}{2}\right) \chi$$

finalement :
$$\omega \left(\frac{L}{g} \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{3}n + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \chi^{1/2} \tag{3.36}$$

c'est la relation de dispersion représenté dans la figure (3.6)

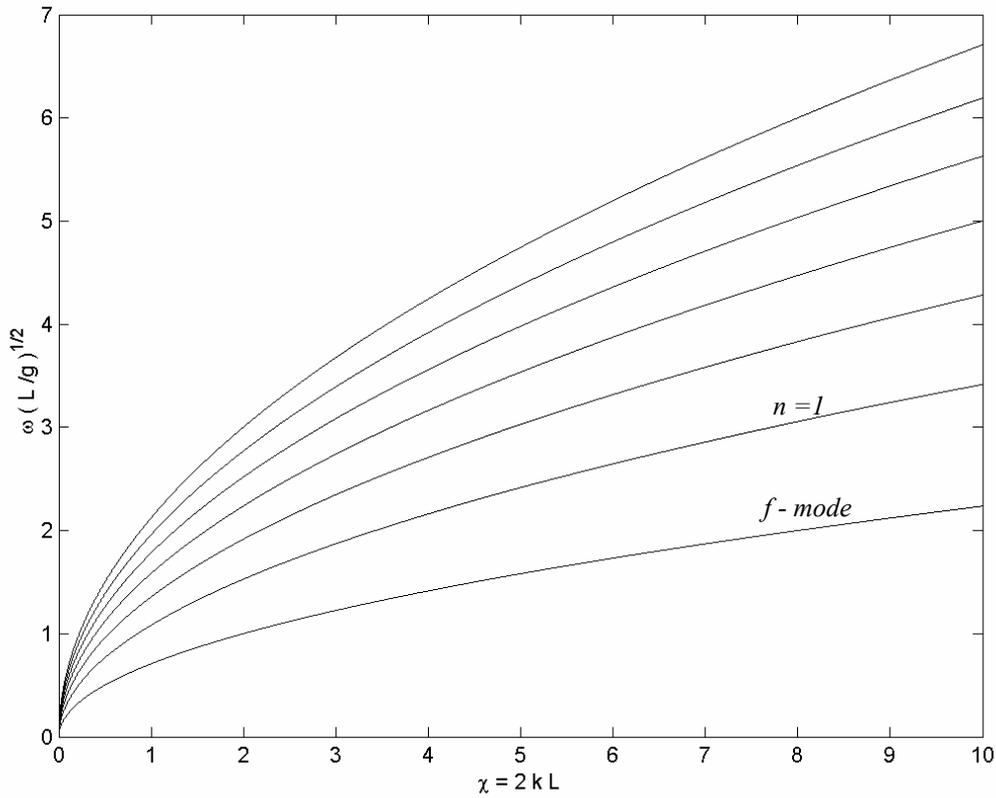


Figure 3.6: Courbe de dispersion des ondes dans un polytrophe non magnétique et Les sept premiers modes *P*, on remarque la similitude entre cette courbe et le spectre de dispersion de la figure (3.1)

3.5-Comparaison entre une atmosphère isotherme non magnétique et une atmosphère polytrophe non magnétique :

Dans une Atmosphère stratifiée, et dans le cas d'absence du champ magnétique, une perturbation du fluide se propage sous forme d'une onde gravito-acoustique ou onde Atmosphérique, les forces réagissant ces ondes sont la poussée d'Archimède et la force de pression.

Dans le cas d'une atmosphère isotherme, la relation de dispersion régissant ces ondes dans ce milieu est obtenue à partir des équations de l'Hydrodynamique (Lamb 1945):

$$\omega^4 - \omega^2 C_S^2 \left(k^2 + l^2 + \frac{1}{4H^2} \right) + k^2 g^2 (\gamma - 1) = 0 \quad (3.37)$$

et à partir de la perturbation de vitesse $V \propto A(z) \exp\{-i(kx + lz)\}$.

l étant le nombre d'onde vertical, H est l'échelle de hauteur avec $H = RT/g$.

En posant le changement de variables additionnelles suivant :

$$\nu = \omega H / C_S, \quad \kappa = k H, \quad \kappa_z = l H.$$

En remplaçant le tout dans l'équation (3.37), et après simplification, nous obtenons la relation de dispersion :

$$\nu^4 - \nu^2 \left(\kappa^2 + \kappa_z^2 + \frac{1}{4} \right) + n_B^2 \kappa^2 = 0 \quad (3.38)$$

avec $n_B = \frac{N_B H}{C_S} = \frac{g (\gamma - 1)^{1/2}}{C_S^2}$ dont N_B est la fréquence de Brunt-Vaissala donnée

par $N_B = \frac{(\gamma - 1)^{1/2} C_S}{\gamma H}$.

Les fréquences étant réelles et positives, les deux solutions à l'équation (3.38) sont :

$$v_1 = \left[\frac{1}{2} \left(\kappa^2 + \kappa_z^2 + \frac{1}{4} \right) \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2 \kappa n_B}{\kappa^2 + \kappa_z^2 + 1/4} \right)^2} \right) \right]^{1/2}$$

$$v_2 = \left[\frac{1}{2} \left(\kappa^2 + \kappa_z^2 + \frac{1}{4} \right) \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2 \kappa n_B}{\kappa^2 + \kappa_z^2 + 1/4} \right)^2} \right) \right]^{1/2}$$

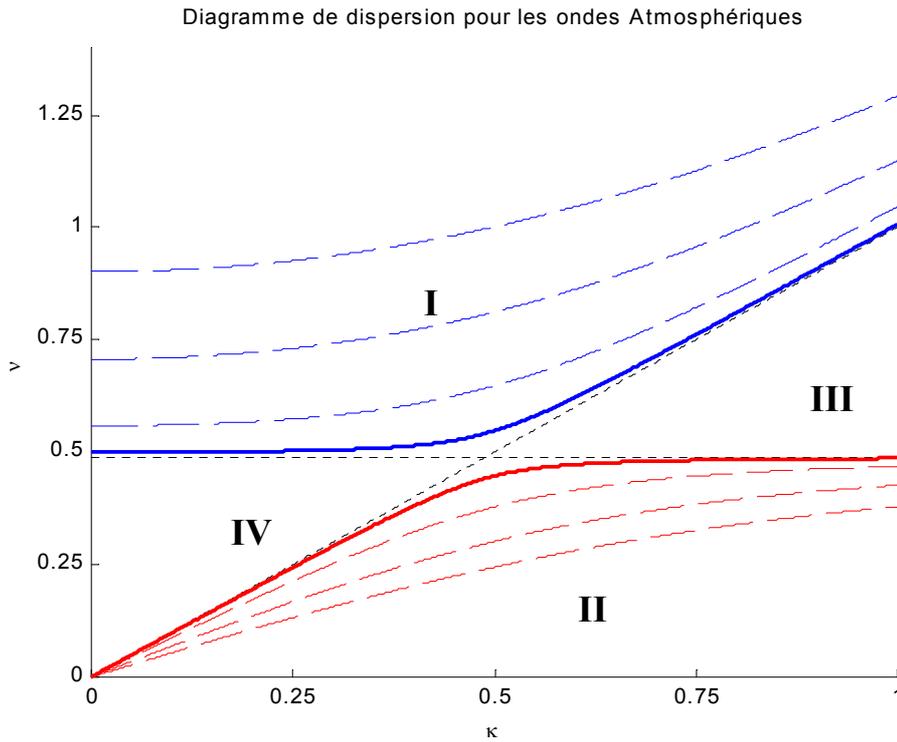


Figure 3.7 : Courbe de dispersion des ondes Atmosphériques dans une atmosphère isotherme non magnétique

La courbe de dispersion est représentée dans la figure (3.7), les domaines III et IV de la figure correspondent aux modes évanescents externes ($\kappa_z^2 < 0$). Le domaine I est celui du mode acoustique interne ($\kappa_z^2 > 0$), avec des fréquences supérieures à la fréquence de coupure de Lamb ($\nu_L = 0.5$), on trouve aussi le domaine II du mode de gravité interne, avec des fréquences inférieures à la fréquence de Brunt-Vaissala ($n_B = 0.4899$).

La figure(3.6) représente la courbe de dispersion de la fréquence réelle $\omega(L/g)^{1/2}$ en fonction du nombre d'onde adimensionnel χ , et donc elle constitue la courbe représentative

de l'atmosphère polytrophe non magnétique. En première vue, cette courbe n'a aucune ressemblance avec celle de la Figure (3.7), or on sait que cette dernière concerne le cas isotherme, et donc elle est tracée pour une température bien fixe, alors que pour le cas polytrophe, la température et la vitesse acoustique varient avec la profondeur z , c'est à partir de cette remarque qu'on constate ceci :

Dans le cas isotherme, la fréquence de Lamb ainsi que celle de Brunt-Vaissala sont des constantes, alors que pour le cas polytrophe, la fréquence de Lamb augmente avec la profondeur z , tandis que celle de Brunt-Vaissala diminue avec z , et donc, le domaine III de la figure (3.7), délimité par ces deux fréquences caractéristiques s'élargit pour z croissant, il semble que les ondes externes sont les plus favorisées.

C'est pour cette raison que la courbe de dispersion du polytrophe non magnétique représente les modes d'oscillations externes.

Dans le cas non magnétique, on a une prédominance des ondes acoustiques $C_S \gg C_A$, dans ce cas, nous avons $\nu_L = \frac{C_S}{2H} \rightarrow \infty$ et $n_B \rightarrow 0$, la pente de l'asymptote $\nu = C_{asym} \kappa$ tend vers l'infinie, ainsi, les courbes du domaine III auront une valeur inférieure très petite de la fréquence ν_L , et une valeur supérieure très grande de la fréquence n_B , dans ce cas, l'allure de ces courbes présente une similitude avec celle de la Figure (3.6).

On peut dire aussi que les régions les plus favorables au piégeage des modes acoustiques sont les domaines III et IV, ceci peut être expliqué très bien avec une atmosphère polytrophe où la vitesse du son augmente avec la profondeur.

On a représenté dans la figure (3.8) la propagation d'une hypothétique onde acoustique externe. Dans une atmosphère polytrophe, et pour $z_2 \gg z_1$, la vitesse acoustique $C_S(z_2) \gg C_S(z_1)$, ceci se traduit par un pivotement de l'onde vers la surface solaire (réfraction), une fois arrivée à cette interface, l'onde va se réfléchir vers le bas, et ainsi de suite jusqu'au piégeage de ces modes.

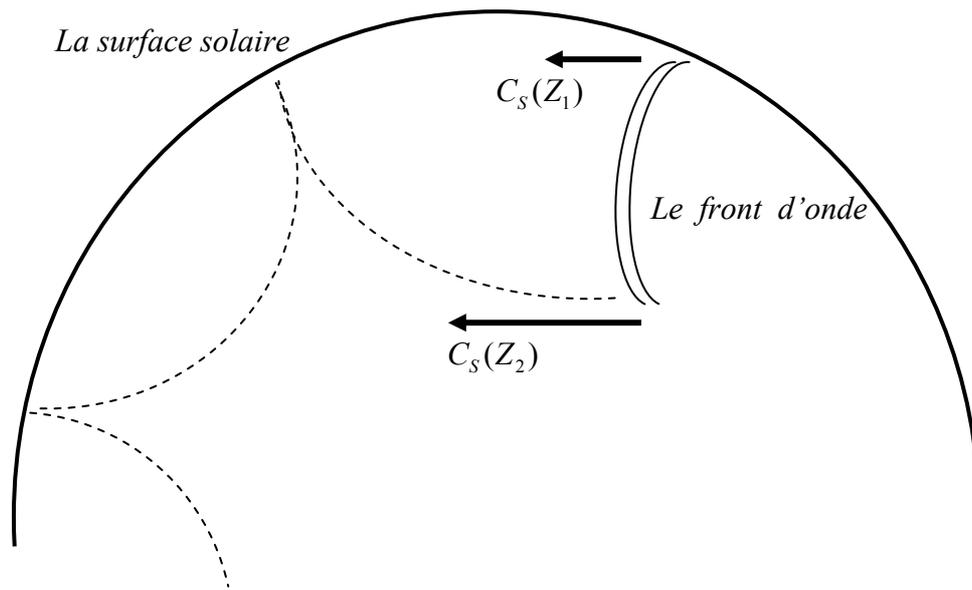


Figure 3.8 : piégeage des modes acoustiques externes

3.6-Résultats et discussion :

On remarque d'abord que les fréquences obtenues sont des fréquences réelles, et pour chaque entier naturel n , on a une courbe de dispersion bien définie. Ces deux caractéristiques nous indiquent que les fréquences obtenues correspondent bien à des modes propres d'oscillations (celles du mode non magnétique P).

Un cas très intéressant se présente, celui pour $n = 0$, on a les résultats suivants :

$$\phi(\zeta) = e^{-\zeta/2} \quad , \quad \psi(\zeta) = 0 \quad , \quad \Omega^2 = \frac{3}{4}$$

celles ci sont des solutions exactes des équations (3.10) et (3.11).

Le fondamental $n = 0$ (mode f) correspond à la fréquence caractéristique :

$$\omega = \sqrt{g k} \tag{3.39}$$

Une caractéristique importante de ce mode c'est qu'il décroît approximativement en exponentielle loin de la surface, comme le montre la relation $U_z = -2k \frac{d\phi}{d\zeta}$

avec $\phi = e^{-\zeta/2}$ et donc :

$$U_z = k e^{-\zeta/2}$$

Concernant les autres valeurs de n , on établira la notation suivante : $n=1$ correspond au mode P_1 , $n=2$ au mode P_2 , et ainsi de suite. Globalement, ce mode est caractérisé par la relation de dispersion

$$\omega \sim \sqrt{gk} \quad (3.40)$$

3.7-Conclusion :

Dans ce modèle établi pour une atmosphère polytrophe, on constate l'existence de deux types de mode d'oscillation, le mode P non magnétique, et le mode S magnétique, ces deux modes se couplent dans un polytrophe magnétique. L'étude de l'atmosphère non magnétique nous a permis de déterminer la relation et donc la courbe de dispersion, de cette dernière, nous avons obtenu d'intéressantes informations :

- La courbe de dispersion du polytrophe non magnétique présente une similitude avec celle obtenue expérimentalement à partir des données héliosismologiques.
- Une atmosphère polytrophe favorise le piégeage des modes acoustiques.

Cette étude globale nous donne une idée claire du comportement des ondes Magnéto-Atmosphériques dans une atmosphère polytrophe, le cas non magnétique s'est avéré très intéressant, vu la richesse des informations tirées, les courbes de dispersion obtenues vont nous servir comme une référence afin de les comparer avec celles du cas magnétique, ça sera l'objet du chapitre suivant.

4.1-Introduction :

Dans le chapitre précédent, nous avons expliqué les oscillations de 5 minutes dans l'ombre de la tache solaire, et ceci, en étudiant les ondes atmosphériques dans une atmosphère polytrophe non magnétique, découvertes par Bhatnagar, Livingston et Harvey (1972), ils ont été interprétées comme une réponse passive des taches solaires par les modes *P* au alentour de la zone de convection (Thomas 1981), ces oscillations nous offrent la possibilité de sonder la structure de la tache solaire à la surface du soleil visible.

Les observations de la surface solaire ont montrées qu'il existe un autre type d'oscillations dans l'ombre d'une tache solaire, avec une période de 3 minutes, ces derniers sont les plus intéressantes, elles se situent au niveau de la photosphère et la chromosphère, découvertes par Giovanelli (1972), Bhatnagar et Tanaka (1972), Beckers et Schultz (1972), ces oscillations représentent la résonance des taches solaires, c'est un mode propre (Figure 4.1)

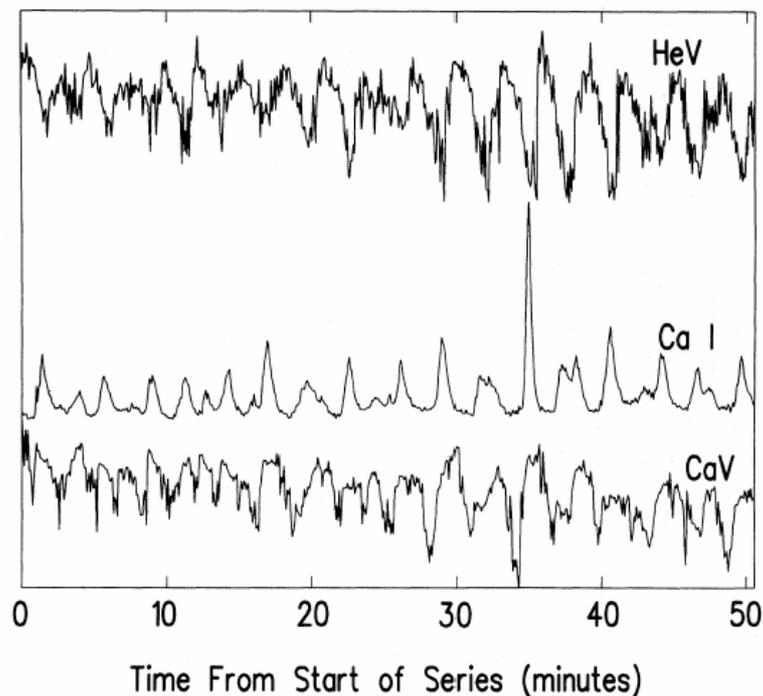


Figure 4.1 : Série temporelle qui mesure la longueur d'onde de l'intensité maximale des raies spectrales **CaI**, **CaV** et **HeV** dans l'ombre d'une tache solaire, le déplacement et l'intensité sont normalisés pour avoir la même amplitude, on voit clairement que la variation de l'intensité des différentes raies est de l'ordre d'une période de 3 minutes (Lites , 1986)

Afin d'expliquer les oscillations de 3 minutes, les travaux théoriques se divisent en deux courants différents :

1-Résonance photosphérique pour les ondes Magnéto-Atmosphériques fast, la résonance est causée par le piégeage des modes fast, et ceci, suite à une réflexion vers le bas due au décroissement soudain de la densité, puis une réfraction vers le haut due à l'augmentation de la vitesse du son (Uchida et Sakurai, 1975 ; Scheurer et Thomas, 1981 ; Cally, 1983, Abdelatif, 1990 ; Hasan, 1991).

2- Résonance chromosphérique pour les ondes Magnéto-Atmosphériques slow, la résonance est causée par le piégeage des modes slow suite à une réflexion vers le bas, due à l'augmentation de la température dans la région de transition couronne-chromosphère, puis une réflexion vers le haut dans la région qui correspond à $T = T_{min}$ en haut de la photosphère (Zhugzda, Locans et Staude, 1983, 1984 ; Gurman et Leibacher, 1984).

Ces oscillations sont excitées par plusieurs mécanismes opérant au niveau inférieur de la surface visible de l'ombre, ces mécanismes excitent les oscillations de la cavité subphotosphérique, l'énergie est transférée aussi vers la cavité chromosphérique.

L'amplitude des oscillations de 3 minutes est beaucoup moindre dans la photosphère que dans la chromosphère, ceci à cause de la densité qui est plus grande dans la photosphère (Lites et Thomas, 1985 ; Abdelatif, Lites et Thomas, 1986), et donc, il est clair que les oscillations photosphériques guident les oscillations chromosphériques et pas l'inverse.

L'importance de ces oscillations est cruciale pour notre exposé, elles fournissent un diagnostic de la structure de l'atmosphère stratifiée de l'ombre, et donc constituent un test inestimable pour notre modèle.

Nous avons adopté dans ce chapitre et le chapitre précédent la théorie de la résonance photosphérique, ceci est justifié par notre choix d'une atmosphère polytrophe, cette dernière correspond à la zone de convection ($T \propto z$) où le piégeage des modes fast est prévu prendre place.

Dans ce chapitre, on va étudier les ondes Magnéto-Atmosphériques dans une atmosphère polytrophe magnétique, chercher et discuter les solutions obtenues, étudier la conversion de modes, tracer la courbe de dispersion, et enfin, on terminera avec l'interprétation des résultats obtenus avec la conclusion.

4.2-Le modèle :

Dans le cadre d'une atmosphère magnétique, nous adoptons le même modèle décrit au chapitre précédent. Pour un polytrophe fortement magnétique, les solutions se couplent, ainsi, nous obtenons les équations (4.1) et (4.2):

$$\frac{d^2\phi}{d\zeta^2} + \frac{m}{\zeta} \frac{d\phi}{d\zeta} + \frac{\Omega^2}{\zeta} \phi = \frac{1}{4} \Psi \quad (4.1)$$

$$\chi^{m+1} \left(\frac{d^2\Psi}{d\zeta^2} - \frac{1}{4} \Psi \right) = \Omega^2 \zeta^m (\phi - \Psi) \quad (4.2)$$

avec $\Psi = \phi + \psi$

4.3-Les conditions aux limites :

Pour une atmosphère polytrophe ($C_S \propto z$), la fréquence de Lamb ($\omega_L = k C_S$) croit avec la profondeur Z , et la fréquence de coupure acoustique ($\omega_C = C_S/2 H_\rho$) varie inversement avec la fréquence de Lamb. Cette combinaison de variation rend un possible piégeage des modes d'oscillations dans cette atmosphère sans nécessairement imposé des limites de réflexion artificielles ou rigides (Cally et Bogdan, 1993).

La variation de z se fait entre la surface ($z = 0$) et ($z \rightarrow -\infty$), donc entre ($\zeta = 0$) et ($\zeta \rightarrow \infty$).

Les équations MAG nécessitent 4 conditions aux limites :

- 2 conditions pour $z = 0, \zeta = 0$.
- 2 conditions pour $z \rightarrow -\infty, \zeta \rightarrow \infty$.

1. $z = 0$:

Les conditions aux limites à la surface de l'atmosphère sont (Robert et Soward, 1983) :

a) - Variation lente du champ magnétique à la surface ; $\frac{\vec{B}_{,t}}{B} \rightarrow 0$ avec $\vec{B}_{,t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

ce qui est équivalent à écrire :

$$\frac{d}{d\zeta} \Psi = \pm \frac{1}{2} \Psi$$

Cette dernière s'obtient comme suit :

Nous avons l'équation $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{B})$ (équations MHD pour le régime magnétique).

On pose $\vec{B}_{,t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{B})$ avec $\vec{B} = B \vec{e}_z$ et $U = U(z) \exp\{kx - \omega t\}$

Ce qui donne $\vec{B}_{,t} = B \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial U_y}{\partial z} \vec{e}_y - \frac{\partial U_x}{\partial x} \vec{e}_z \right)$

on peut écrire donc $B_{x,t} = B \frac{\partial U_x}{\partial z}$ et $B_{z,t} = -B \frac{\partial U_x}{\partial x}$

$$B_{x,t} = B \frac{\partial U_x}{\partial z} \quad (4.3)$$

$$B_{z,t} = -i k B U_x \quad (4.4)$$

or $B_{,t}^2 = B_{x,t}^2 + B_{z,t}^2 = B^2 \left(\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} \right)^2 - k^2 U_x^2 \right)$

d'où $\frac{B_{,t}^2}{B^2} = \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} \right)^2 - k^2 U_x^2 = k^4 \Psi^2 - 4 k^4 \left(\frac{d\Psi}{d\zeta} \right)^2$

Variation lente du champ magnétique revient à écrire que $\frac{B_{,t}}{B} \rightarrow 0$ donc

$$k^4 \Psi^2 - 4k^4 \left(\frac{d\Psi}{d\zeta} \right)^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{d\Psi}{d\zeta} \right)^2 = \frac{1}{4} \Psi^2$$

d'où finalement $\frac{d\Psi}{d\zeta} = \pm \frac{1}{2} \Psi$

b) - la vitesse de déplacement du fluide à la surface $U(0)$ doit être finie, ce qui implique que $\phi(0)$ et $\Psi(0)$ doivent être finis.

2. $Z \rightarrow -\infty$:

Il faut éliminer les solutions non physiques pour $\zeta \rightarrow \infty$, par exemple :

a) - il faut garder uniquement les modes évanescents pour $\zeta \rightarrow \infty$.

b) - il faut éliminer les solutions qui représentent des ondes qui viennent de l'infinie.

(Pour plus de détaille, voir Discussion physique)

4.4-Etude des solutions:

Les deux points singuliers des équations différentielles étant $\zeta = 0$ et $\zeta \rightarrow \infty$, il est nécessaire de chercher les solutions au voisinage de $\zeta = 0$ ainsi que les solutions asymptotiques pour $\zeta \rightarrow \infty$.

4.4.1- Les solutions à $\zeta = 0$:

Afin de simplifier les équations différentielles, on pose le changement de variable suivant :

$$\sigma = \zeta^{1/2} \quad \text{Avec toujours} \quad m = 3/2$$

A partir des équations (4.1) et (4.2) nous obtenons ces deux équations en σ :

$$\left(\frac{d^2}{d\sigma^2} + \frac{2}{\sigma} \frac{d}{d\sigma} + 4\Omega^2 \right) \phi = \sigma^2 \Psi \quad (4.5)$$

$$\left(\frac{1}{\sigma^2} \frac{d^2}{d\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^3} \frac{d}{d\sigma} + 4\chi^{-5/2} \Omega^2 \sigma^3 - 1 \right) \Psi = 4\chi^{-5/2} \Omega^2 \sigma^3 \phi \quad (4.6)$$

Vu que le point $\zeta = 0$ est singulier régulier, on peut résoudre cette équation différentielle ordinaire par la méthode de *Frobenius*, pour cela, réduisant d'abord le système d'équations (4.5) et (4.6) en une seule équation en ϕ :

De l'équation (4.5) on a
$$\Psi = \frac{1}{\sigma^2} \phi'' + \frac{2}{\sigma^3} \phi' + \frac{4\Omega^2}{\sigma^2} \phi$$

En substituant cette dernière fonction dans l'équation (4.6), et après tous les calculs des dérivées, on obtient :

$$\begin{aligned} & \sigma^4 \phi^{(4)} - 3\sigma^3 \phi^{(3)} + \left(-6\sigma^2 + 4\Omega^2 \sigma^4 - \sigma^6 + 4\chi^{-5/2} \Omega^2 \sigma^9 \right) \phi'' + (30\sigma - 20\Omega^2 \sigma^3 - 2\sigma^5 \\ & + 8\Omega^2 \chi^{-5/2} \sigma^8) \phi' + (32\Omega^2 \sigma^2 - 4\Omega^2 \sigma^6 + 16\Omega^4 \chi^{-5/2} \sigma^9 - 4\chi^{-5/2} \Omega^2 \sigma^{11}) \phi = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

la méthode de *Frobenius* propose une solution sous la forme :

$$\phi(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sigma^{n+\nu}$$

ce qui donne pour les dérivées premières, secondes, troisièmes et quatrièmes :

$$\begin{aligned}\phi'(\sigma) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + \nu) c_n \sigma^{n+\nu-1} \\ \phi''(\sigma) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + \nu)(n + \nu - 1) c_n \sigma^{n+\nu-2} \\ \phi^{(3)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + \nu)(n + \nu - 1)(n + \nu - 2) c_n \sigma^{n+\nu-3} \\ \phi^{(4)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + \nu)(n + \nu - 1)(n + \nu - 2)(n + \nu - 3) c_n \sigma^{n+\nu-4}\end{aligned}$$

en substituant ϕ ainsi que ses dérivées dans l'équations (4.7), puis en réduisant tout les σ à la même puissance , et en identifiant l'équation à zéro , nous obtenons cette égalité :

$$\begin{aligned}& \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n [(n + \nu)(n + \nu - 1)(n + \nu - 2)(n + \nu - 3) - 3(n + \nu)(n + \nu - 1)(n + \nu - 2) - 6(n + \nu)(n + \nu - 1) \right. \\ & \left. + 30(n + \nu)] + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} [4\Omega^2(n + \nu - 2)(n + \nu - 3) - 20\Omega^2(n + \nu - 2) + 32\Omega^2] \right. \\ & \left. + \sum_{n=7}^{\infty} c_{n-7} [4\chi^{-5/2}\Omega^2(n + \nu - 7)(n + \nu - 8) + 8\Omega^2\chi^{-5/2}(n + \nu - 7)] \right. \\ & \left. - \sum_{n=4}^{\infty} c_{n-4} [(n + \nu - 4)(n + \nu - 5)] + 16\Omega^4\chi^{-5/2} \sum_{n=9}^{\infty} c_{n-9} - 4\Omega^2\chi^{-5/2} \sum_{n=11}^{\infty} c_{n-11} \right) \sigma^{n+\nu} = 0\end{aligned}\quad (4.8)$$

pour $n = 0$, $\sigma^\nu \neq 0$ nous obtenons à partir de la dernière égalité :

$$c_0 [\nu(\nu - 1)(\nu - 2)(\nu - 3) - 3\nu(\nu - 1)(\nu - 2) - 6\nu(\nu - 1) + 30] = 0$$

pour $c_0 \neq 0$ nous avons :

$$\nu(\nu(\nu - 1)(\nu - 2)(\nu - 6) - 6\nu + 36) = 0$$

la résolution de cette équation en ν nous permet d'obtenir les valeurs :

$$\nu = -1 \quad , \quad \nu = 0 \quad , \quad \nu = 4 \quad , \quad \nu = 6$$

la valeur $\nu = -1$ est exclus , car pour $z = 0$, donc $\sigma = 0$, nous aurons $\phi(0) \rightarrow \infty$, ce qui est interdit par la condition au limite qui stipule que pour $z = 0$, la vitesse de déplacement du fluide doit être finie .

Pour $n \neq 0$, et pour $\sigma^{n+\nu} \neq 0$ nous obtenons la relation de récurrence suivante:

$$\begin{aligned}
 & (n + \nu) [(n + \nu - 1)(n + \nu - 2)(n + \nu - 6) - 6(n + \nu) + 36] c_n + 4\Omega^2 [8 + (n + \nu - 2)(n + \nu - 8)] c_{n-2} \\
 & + 4\Omega^2 \chi^{-5/2} (n + \nu - 7)(n + \nu - 6) c_{n-7} - (n + \nu - 4)(n + \nu - 3) c_{n-4} + 16\Omega^4 \chi^{-5/2} c_{n-9} \\
 & - 4\Omega^2 c_{n-6} - 4\chi^{-5/2} \Omega^2 c_{n-11} = 0
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

on pose pour chaque cas $c_0 = 1$

La relation de récurrence (4.9) va nous permettre de déterminer les coefficients c_n de la série $\phi(\sigma)$ pour les différentes ν obtenues.

En assumant que la fonction Ψ a pour forme générale :

$$\Psi(\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \sigma^{n+\nu}$$

et en substituant la fonction $\phi(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sigma^{n+\nu}$ dans l'équation $\Psi = \frac{1}{\sigma^2} \phi'' + \frac{2}{\sigma^3} \phi' + \frac{4\Omega^2}{\sigma^2} \phi$

on trouve

$$\Psi = \sum_{n=-4}^{\infty} (n + \nu + 4) (n + \nu + 5) c_{n+4} \sigma^{n+\nu} + 4\Omega^2 \sum_{n=-2}^{\infty} c_{n+2} \sigma^{n+\nu} \tag{4.10}$$

en comparant la forme générale de Ψ par rapport à l'équation (4.10), on conclut que :

$$b_n = 0 \text{ pour } n < -4$$

$$\text{et donc } \Psi(\sigma) = \sum_{n=-4}^{\infty} b_n \sigma^{n+\nu}$$

en développant l'équation (4.10) et en réduisant tout les σ à la même puissance on trouve la relation :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n [(n + \nu)(n + \nu + 1)] + 4\Omega^2 \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} b_{n-4} \right) \sigma^{n+\nu-4} = 0$$

$$\text{Pour } n = 0, \text{ cette relation devient } b_{-4} = \nu(\nu + 1) \tag{4.11}$$

Pour $n \neq 0$, et pour $\sigma^{n+\nu-2} \neq 0$ on trouve la relation de récurrence :

$$b_{n-4} = c_n (n + \nu)(n + \nu + 1) + 4\Omega^2 c_{n-2} \tag{4.12}$$

les équations (4.11) et (4.12) vont nous permettre de déterminer les coefficients b_n de la série $\Psi(\sigma)$ pour les différentes ν obtenues.

En conclusion, nous avons obtenus : $\nu = 0$, $\nu = 4$, $\nu = 6$

avec les relations:

$$c_0 = 1$$

$$\begin{aligned} (n + \nu) [(n + \nu - 1)(n + \nu - 2)(n + \nu - 6) - 6(n + \nu) + 36] c_n + 4\Omega^2 [8 + (n + \nu - 2)(n + \nu - 8)] c_{n-2} \\ + 4\Omega^2 \chi^{-5/2} (n + \nu - 7)(n + \nu - 6) c_{n-7} - (n + \nu - 4)(n + \nu - 3) c_{n-4} + 16\Omega^4 \chi^{-5/2} c_{n-9} \\ - 4\Omega^2 c_{n-6} - 4\chi^{-5/2} \Omega^2 c_{n-11} = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$b_{-4} = \nu(\nu + 1) \quad (4.14)$$

$$b_{n-4} = c_n (n + \nu)(n + \nu + 1) + 4\Omega^2 c_{n-2} \quad (4.15)$$

A partir des équations (4.13), (4.14) et (4.15) et la condition au limite pour Ψ , on peut obtenir tous les constantes c_n et b_n (voir Appendice 2)

La solution générale peut s'écrire alors comme :

$$\psi = A \Psi_0 + B \Psi_4 + C \Psi_6$$

$$\phi = A \phi_0 + B \phi_4 + C \phi_6$$

avec A, B et C sont des constantes.

Les solutions obtenues sont :

$$\Psi_0 = -\frac{\Omega^4}{3} \left(8 + 4\zeta + \zeta^2 + \frac{\zeta^3}{6} + \dots \right)$$

$$\Psi_4 = 20 + 10\zeta + \frac{5}{2}\zeta^2 + \frac{5}{12}\zeta^3 + \dots$$

$$\Psi_6 = 42\zeta + \frac{7}{4}\zeta^3 + \dots$$

et

$$\phi_0 = 1 - \frac{2\zeta\Omega^2}{3} - \frac{2\zeta^3\Omega^4}{63} + \dots$$

$$\phi_4 = \zeta^2 + \frac{5 - 2\Omega^2}{21} \zeta^3 + \dots$$

$$\phi_6 = \zeta^3 - \frac{\Omega^2}{18} \zeta^4 + \dots$$

d'un autre coté, nous avons :

$$\Psi = A \left(-\frac{\Omega^4}{3} \left(8 + 4\zeta + \zeta^2 + \frac{\zeta^3}{6} + \dots \right) \right) + B \left(20 + 10\zeta + \frac{5}{2}\zeta^2 + \frac{5}{12}\zeta^3 + \dots \right) + C \left(42\zeta + \frac{7}{4}\zeta^3 + \dots \right)$$

ou encore

$$\Psi = \left(-\frac{8\Omega^4}{3} A + 20 B \right) + \left(-\frac{4\Omega^4}{3} A + 10 B + 42 C \right) \zeta + \dots$$

En appliquant toujours la condition aux limites $\frac{d\Psi}{d\zeta} = \frac{1}{2} \Psi$ pour la solution générale Ψ

$$\frac{d\Psi}{d\zeta} = \left(-\frac{4\Omega^4}{3} A + 10 B + 42 C \right) + \dots$$

$$\frac{1}{2} \Psi = \left(-\frac{4\Omega^4}{3} A + 10 B \right) + \dots$$

en faisant l'égalité entre les coefficients des ζ qui ont la même puissance on trouve :

$$-\frac{4\Omega^4}{3} A + 10 B + 42 C = -\frac{4\Omega^4}{3} A + 10 B$$

$$\Rightarrow C = 0$$

d'où finalement :

$$\Psi = A\Psi_A + B\Psi_B$$

$$\phi = A\phi_A + B\phi_B$$

avec

$$\phi_A = 1 - \frac{2\zeta\Omega^2}{3} - \frac{2\zeta^3\Omega^4}{63} + \dots \quad (4.16)$$

$$\Psi_A = -\frac{\Omega^4}{3} \left(8 + 4\zeta + \zeta^2 + \frac{\zeta^3}{6} + \dots \right) \quad (4.17)$$

et

$$\phi_B = \zeta^2 + \frac{1}{21}\zeta^3(5 - 2\Omega^2) + \dots \quad (4.18)$$

$$\Psi_B = 20 + 10\zeta + \frac{5\zeta^2}{2} + \frac{5\zeta^3}{12} + \dots \quad (4.19)$$

4.4.2- Les solutions asymptotiques pour $\zeta \rightarrow \infty$:

Le point $\zeta = \infty$ est un point singulier non régulier, on va donc utiliser une autre méthode pour résoudre le système d'équation différentielle (4.5) et (4.6)

La méthode de la *Balance Dominante* (Bender et Orzag 1978, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers) est une méthode qui consiste à déterminer tous les termes qui font partie de la solution exacte de l'équation différentielle et qui ont été négligés dans la limite asymptotique. La technique de la Balance Dominante consiste en trois étapes principales :

1-On néglige tous les termes qui semblent être très petits, et on remplace l'équation exacte par une relation asymptotique.

2-On remplace la relation asymptotique par une autre relation dans l'équation différentielle, et on résout cette dernière en échangeant le signe « \sim » par celui « $=$ ».

3-On vérifie si cette solution obtenue en (2) est consistante avec l'approximation en (1).

La 1^{ère} étape à faire pour chercher la solution asymptotique au voisinage d'un point singulier non régulier est de déterminer le *facteur de contrôle*, ce dernier étant une solution principale qui est généralement sous la forme d'une exponentielle $e^{s(x)}$.

Si x_0 est un point singulier non régulier, alors généralement c'est juste de poser que

$$s'' \ll (s')^2 \quad x \rightarrow x_0 \quad (4.20)$$

Dans notre cas, nous avons l'équation différentielle de 4^{ème} ordre en ϕ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma^2} \phi^{(4)} - \frac{3}{\sigma^3} \phi^{(3)} + \left(-\frac{6}{\sigma^4} + \frac{4\Omega^2}{\sigma^2} - 1 + 4\chi^{-5/2}\Omega^2\sigma^3 \right) \phi'' + \left(\frac{30}{\sigma^5} - \frac{20\Omega^2}{\sigma^3} - \frac{2}{\sigma} \right. \\ & \left. + 8\Omega^2\chi^{-5/2}\sigma^2 \right) \phi' + \left(\frac{32\Omega^2}{\sigma^4} - 4\Omega^2 + 16\Omega^4\chi^{-5/2}\sigma^3 - 4\chi^{-5/2}\Omega^2\sigma^5 \right) \phi = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

On pose $\phi(\sigma) = e^{s(\sigma)}$ et en calculant les dérivées de ϕ , en remplaçant le tous dans l'équation (4.21), on trouve :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\sigma^2} \left((s^{(4)}) + (s')^4 + 4s' s''' + 6(s')^2 s'' + 3(s'')^2 \right) - \frac{3}{\sigma^3} (s''' + 3s' s'' + (s')^3) \right. \\ & + \left(-\frac{6}{\sigma^4} + \frac{4\Omega^2}{\sigma^2} - 1 + 4\chi^{-5/2} \Omega^2 \sigma^3 \right) \left((s')^2 + s'' \right) + \left(\frac{30}{\sigma^5} - \frac{20\Omega^2}{\sigma^3} - \frac{2}{\sigma} + 8\Omega^2 \chi^{-5/2} \sigma^2 \right) (s') \\ & \left. + \left(\frac{32\Omega^2}{\sigma^4} - 4\Omega^2 + 16\Omega^4 \chi^{-5/2} \sigma^3 - 4\chi^{-5/2} \Omega^2 \sigma^5 \right) \right] e^{s(\sigma)} = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

vu que σ est un point singulier irrégulier, on peut utiliser l'approximation :

$$(s')^2 \gg s'' \quad \sigma \rightarrow \infty$$

ainsi que :

$$2s' s'' \gg s^{(3)}$$

$$4s' s^{(3)} + 4(s'')^2 \gg s^{(4)} \quad \sigma \rightarrow \infty$$

et aussi :

$$(s')^3 \gg s'' s'$$

$$(s')^4 \gg s'' (s')^2 \quad \sigma \rightarrow \infty$$

en tenant compte des approximations ci dessus, l'équation (4.22) s'écrit comme

$$\begin{aligned} & \frac{(s')^4}{\sigma^2} + \frac{(s')^3}{\sigma^3} + \left(\frac{-6}{\sigma^4} - 1 + 4\chi^{-5/2} \Omega^2 \sigma^3 \right) (s')^2 + \left(\frac{30}{\sigma^5} - \frac{20\Omega^2}{\sigma^3} - \frac{2}{\sigma} + 8\Omega^2 \chi^{-5/2} \sigma^2 \right) (s') \\ & + \frac{32\Omega^2}{\sigma^4} - 4\Omega^2 + 16\Omega^4 \chi^{-5/2} \sigma^3 - 4\chi^{-5/2} \Omega^2 \sigma^5 = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

avec $e^{s(\sigma)} \neq 0$

pour $\sigma \rightarrow \infty$ on peut négligé les termes $\frac{32\Omega^2}{\sigma^4} - 4\Omega^2 + 16\Omega^4 \chi^{-5/2} \sigma^3$ devant

$$4\chi^{-5/2} \Omega^2 \sigma^5$$

pour $\sigma \rightarrow \infty$, nous avons aussi $\frac{(s')^4}{\sigma^2}, \frac{(s')^3}{\sigma^3}, \frac{-6(s')^2}{\sigma^4} \rightarrow 0$ ainsi que

$$4\chi^{-5/2} \Omega^2 \sigma^3 (s')^2 \gg 8\Omega^2 \chi^{-5/2} \sigma^2 (s')$$

il en reste les termes :

$$-(s')^2 + 4\chi^{-5/2} \Omega^2 \sigma^3 (s')^2 \approx 4\chi^{-5/2} \Omega^2 \sigma^5 \quad (4.24)$$

L'équation (4.24) comporte deux solutions possibles, une solution oscillatoire vu le terme $-(s')^2$, et une autre solution en exponentielle :

$$\square \quad 4\chi^{-5/2} \Omega^2 \sigma^3 (s')^2 \approx 4\chi^{-5/2} \Omega^2 \sigma^5$$

$$\text{après intégration, on trouve } s \sim \pm \frac{\sigma^2}{2} \Rightarrow \phi \sim \exp\left(\pm \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad (4.25)$$

la solution $\phi \sim \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)$ est refusée, on retient uniquement la solution qui représente une onde évanescente :

$$\phi_\pi \sim \exp\left(-\frac{\zeta}{2}\right) \quad (4.26)$$

qu'on appellera le mode piégé fast, ou π mode, cette nomination est due essentiellement au comportement de ce mode qui se rapproche de celui du mode P acoustique. (voir discussion physique des solutions)

$$\square \quad -(s')^2 \approx 4\chi^{-5/2} \Omega^2 \sigma^5$$

$$\text{après intégration, on trouve } s \sim \pm i \frac{4}{7} \chi^{-5/4} \Omega \sigma^{7/2}$$

$$\Rightarrow \phi \sim \exp\left(\pm i \frac{4}{7} \chi^{-5/4} \Omega \sigma^{7/2}\right) \quad (4.27)$$

la solution $\phi \sim \exp\left(-i \frac{4}{7} \chi^{-5/4} \Omega \sigma^{7/2}\right)$ est rejetée car elle représente une onde qui vient de l'infinie, on retient donc uniquement la solution oscillatoire :

$$\phi_s \sim \exp\left(i \frac{4}{7} \chi^{-5/4} \Omega \sigma^{7/2}\right) \quad (4.28)$$

la solution (4.28) est associée au mode magnétoacoustique slow, ou le mode slow quasi-Alfvénic ; le mode S , elle indique aussi la présence d'une onde qui se propage vers l'infinie. (Voir discussion physique des solutions)

Afin de mieux connaître les caractéristiques de ces modes, cherchons maintenant la forme détaillée des solutions S et π en utilisant la méthode de la Balance Dominante.

Le mode π :

En réalité, s dans l'équation (4.25) est obtenue à une fonction d'intégration près $c(\sigma)$:

$$s = -\frac{\sigma^2}{2} + c(\sigma) \quad \text{avec}$$

$$c(\sigma) \ll \frac{\sigma^2}{2} \quad \text{pour} \quad \sigma \rightarrow \infty \quad (4.29)$$

En introduisant l'expression de s et ses dérivées dans l'équation différentielle (4.21), en simplifiant et en utilisant la condition (4.29) ainsi que celles qui en découlent :

$$c(\sigma) \ll \frac{\sigma^2}{2} \quad \text{pour} \quad \sigma \rightarrow \infty$$

$$c'(\sigma) \ll \sigma \quad \text{pour} \quad \sigma \rightarrow \infty$$

$$c''(\sigma) \ll 1 \quad \text{pour} \quad \sigma \rightarrow \infty$$

on obtient l'équation :

$$-2\sigma c' - 3 - 4\Omega^2 + \frac{c}{\sigma} = 0 \quad \sigma \rightarrow \infty \quad (4.30)$$

maintenant discutons les deux possibilités :

$$1. \quad \frac{c}{\sigma} \ll 2\sigma c' \Rightarrow \frac{c}{c'} \ll 2\sigma^2 \quad \sigma \rightarrow \infty$$

$$2. \quad \frac{c}{\sigma} \gg 2\sigma c' \Rightarrow \frac{c}{c'} \gg 2\sigma^2 \quad \sigma \rightarrow \infty$$

or nous avons la condition $c(\sigma) \ll \frac{\sigma^2}{2}$

$$\text{ou encore} \quad c(\sigma) \ll \sigma \frac{\sigma}{2} \quad (4.31)$$

on a aussi la condition $\sigma \gg c'$ ce qui nous permet d'écrire l'équation (4.31) comme

$$c \ll c' \frac{\sigma}{2} \Rightarrow \frac{c}{c'} \ll \frac{\sigma}{2} \quad \sigma \rightarrow \infty$$

on remarque que cette condition se contredit avec la possibilité 2, mais elle est acceptable

pour la possibilité 1, donc on choisit la cas $\frac{c}{\sigma} \ll 2\sigma c'$, ce qui permet d'écrire l'équation

$$(4.30) \text{ comme :} \quad -2\sigma c' - 3 - 4\Omega^2 = 0 \quad \sigma \rightarrow \infty \quad (4.32)$$

à partir de l'équation (4.32) on obtient la fonction $c(\sigma)$:

$$c = \log\left(\sigma^{2(\Omega^2-3/4)}\right) \quad \text{d'où} \quad \phi_\pi = \zeta^{\Omega^2-3/4} \exp\left(-\frac{\zeta}{2}\right)$$

De même, la fonction c est obtenue à une fonction près, très petite,

donc on peut écrire ϕ_π comme :
$$\phi_\pi = w \zeta^{\Omega^2-3/4} \exp\left(-\frac{\zeta}{2}\right)$$

avec $w \approx 1 + \varepsilon$ et $\varepsilon \ll 1$ pour $\sigma \rightarrow \infty$

On réintroduit ϕ_π dans l'équation différentielle (4.20), et après simplifications, on obtient l'équation :

$$-8\Omega^2 \chi^{-5/2} \sigma^{2\Omega^2+5/2} w' + \left((2\Omega^2-1) 8\Omega^2 \chi^{-5/2} \sigma^{2\Omega^2+3/2} - 2\sigma^{2\Omega^2+1/2} \right) w = 0 \quad (4.33)$$

$\sigma \rightarrow \infty$

en simplifiant par $\sigma^{2\Omega^2}$, puis en multipliant l'équation (4.33) par $\sigma^{5/2}$ on trouve :

$$A \sigma^5 w' + B \sigma^4 w - 2\sigma^3 w = 0 \quad (4.34)$$

avec $A = -8\Omega^2 \chi^{-5/2}$ et $B = 8(2\Omega^2-1) \Omega^2 \chi^{-5/2}$

Comme précédemment, on peut écrire w sous la forme :

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sigma^{-\alpha n} \quad \text{avec } \alpha \text{ un facteur à déterminer}$$

en remplaçant w dans l'équation (4.34), on trouve :

$$-A\alpha \sum_{n=0}^{\infty} n u_n \sigma^{-\alpha n+4} + B \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sigma^{-\alpha n+4} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} u_{n-1} \sigma^{-\alpha n+3} = 0 \quad (4.35)$$

Afin de résoudre cette équation, il faut poser $\alpha = 1$ et ainsi sortir σ^{n+4} en facteur, ce qui rend l'équation (4.35) :

$$\left(-A\alpha \sum_{n=0}^{\infty} n u_n + B \sum_{n=0}^{\infty} u_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} u_{n-1} \right) \sigma^{-n+4} = 0$$

sachant que $u_0 = 1$, on peut calculer le 1^{er} terme :

pour $n = 1$ et pour $\sigma^3 \neq 0$ on a

$$(B - A)u_1 - 2u_0 = 0$$

$$\text{d'où } u_1 = \frac{2}{(B-A)} = \frac{1}{4\Omega^2 \chi^{-5/2}}$$

$$\text{donc } u_1 \approx 1 + \frac{1}{4\Omega^2 \chi^{-5/2}} \frac{1}{\sigma} + \dots \text{ pour } \sigma \rightarrow \infty$$

cette solution est acceptable car pour $\sigma \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\text{ce qui revient à écrire } w = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sigma^{-n} \text{ avec } u_0 = 1$$

D'où finalement :

$$\phi_\pi \approx U_\pi \zeta^{\Omega^2-3/4} \exp\left(-\frac{\zeta}{2}\right) \text{ avec } U_\pi = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \zeta^{-n/2} \text{ et } u_0 = 1 \quad (4.36)$$

Le calcul de Ψ :

En remplaçant l'expression de ϕ_π dans l'équation différentielle (4.5), et après les simplifications et les approximations suivantes :

$$U_\pi'' \sigma^{2\Omega^2-7/2} \ll U_\pi' \sigma^{2\Omega^2-5/2}$$

$$U_\pi' \sigma^{2\Omega^2-9/2} \ll U_\pi \sigma^{2\Omega^2-7/2}$$

$$U_\pi \sigma^{2\Omega^2-7/2} \ll U_\pi \sigma^{2\Omega^2-3/2}$$

$$U_\pi' \sigma^{2\Omega^2-5/2} \ll U_\pi \sigma^{2\Omega^2-3/2}$$

nous obtenons Ψ_π :

$$\Psi_\pi \approx V_\pi \zeta^{\Omega^2-3/4} \exp\left(-\frac{\zeta}{2}\right) \text{ avec } V_\pi = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \zeta^{-n/2} \text{ et } v_0 = 1 \quad (4.37)$$

Afin d'obtenir les relations de récurrence entre V_n et U_n , il suffit de remplacer les solutions (4.36) et (4.37) dans les équations différentielles (4.5) et (4.6), et après un certain arrangement, on obtient :

$$v_n = u_n + 2(n-2)u_{n-2} + ((n-3)(n-4) + (a+1)(a-2n+8))u_{n-4} \quad (4.38)$$

$$u_n = -\left(\frac{(n-1)(n-2) + (a+1)(a-2n+4)}{2n}\right)u_{n-2} - \left(\frac{(n-5)(n-4) + a(a-2) - (2a-1)(n-5)}{2nb}\right)v_{n-5} - \frac{(n-3-a)}{nb}v_{n-3} \quad (4.39)$$

avec $u_0 = v_0 = 1$ et $a = 2\Omega^2 - \frac{3}{2}$ $b = 4\chi^{-5/2}\Omega^2$

Finalement, à partir des équations (4.38) et (4.39), on obtient tous les coefficients des séries U_n et V_n (voir appendice 2)

Le mode S :

Les solutions Ψ_S, ϕ_S sont obtenues en utilisant la même démarche que précédemment, commençons d'abord à écrire l'équation différentielle de 4ème ordre en Ψ :

$$\frac{1}{b\sigma^2} \Psi^{(4)} - \frac{9}{b\sigma^3} \Psi^{(3)} + \left(\sigma^3 - \frac{1}{b} + \frac{4\Omega^2}{b\sigma^2} + \frac{30}{b\sigma^4}\right) \Psi'' + \left(2\sigma^2 + \frac{4}{b\sigma} - \frac{4\Omega^2}{b\sigma^3} - \frac{30}{b\sigma^5}\right) \Psi' + \left(4\Omega^2\sigma^3 - \sigma^5 - \frac{4\Omega^2}{b} - \frac{6}{b\sigma^2}\right) \Psi = 0 \quad (4.40)$$

avec $b = 4\chi^{-5/2}\Omega^2$

nous avons trouvé pour le mode S que

$$s \sim i \frac{4}{7} \chi^{-5/4} \Omega \sigma^{7/2}$$

comme précédemment, et en utilisant la méthode de la *balance dominante*, on pose

$$s \sim i \frac{4}{7} \chi^{-5/4} \Omega \sigma^{7/2} + c(\sigma)$$

Avec $c(\sigma) \ll i \frac{4}{7} \chi^{-5/4} \Omega \sigma^{7/2}$ pour $\sigma \rightarrow \infty$

En remplaçant la valeur de s dans l'équation différentielle en s , et après tous les simplifications et les approximations usuelles, on trouve que

$$c(\sigma) = \log \sigma^{-3/4} \quad \text{pour } \sigma \rightarrow \infty \text{ donc}$$

$$\Psi_S = \sigma^{-3/4} \exp\left(i \frac{4}{7} \chi^{-5/4} \Omega \zeta^{7/4}\right)$$

en réalité, la fonction Ψ_S peut s'écrire comme $\Psi_S = \zeta^{-3/8} V_S \exp\left(i \frac{4}{7} \chi^{-5/4} \Omega \zeta^{7/4}\right)$ avec

V_S est une fonction très petite avec $V_S = 1 + \varepsilon$ et $\varepsilon \ll 1$

calculant à présent la fonction ϕ_S , pour cela, on remplace la valeur de Ψ_S trouvée dans l'équation :

$$\frac{1}{\sigma^2} \Psi_S'' - \frac{1}{\sigma^3} \Psi_S' + b\sigma^3 \Psi_S - \Psi_S = b\sigma^3 \phi_S$$

$$\text{avec } b = 4\chi^{-5/2} \Omega^2$$

après calculs et tous les approximations pour $\sigma \rightarrow \infty$ on trouve :

$$\phi_S = -\frac{1}{4} \chi^{5/2} \Omega^{-2} \zeta^{-15/8} U_S \exp\left(i \frac{4}{7} \chi^{-5/4} \Omega \zeta^{7/4}\right)$$

$$\text{avec } U_S \approx 1 + \varepsilon \text{ et } \varepsilon \ll 1$$

en substituant l'expression de ϕ_S dans l'équation

$$\frac{1}{\sigma^2} \phi^{(4)} - \frac{3}{\sigma^3} \phi^{(3)} + (-1 + 4\chi^{-5/2} \Omega^2 \sigma^3) \phi'' + \left(-\frac{2}{\sigma} + 8\Omega^2 \chi^{-5/2} \sigma^2\right) \phi' + (4\Omega + 16\Omega^4 \chi^{-5/2} \sigma^3 - 4\chi^{-5/2} \Omega^2 \sigma^5) \phi = 0$$

et pour $\sigma \rightarrow \infty$, et en utilisant toujours la méthode de *balance dominante* on trouve

$$\varepsilon \sim \sigma^{-7/2} \quad \text{donc} \quad \varepsilon \sim \zeta^{-7/4} \quad \text{pour } \sigma \rightarrow \infty,$$

$$\text{on peut écrire alors } U_S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \zeta^{-n/4} \quad \text{ainsi que} \quad V_S = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \zeta^{-n/4}$$

d'où finalement

$$\Psi_S = \zeta^{-3/8} V_S \exp\left(i \frac{4}{7} \chi^{-5/4} \Omega \zeta^{7/4}\right) \quad \text{avec } V_S = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \zeta^{-n/4} \quad \text{et } v_0 = 1 \quad (4.41)$$

$$\phi_S = -\frac{1}{4} \chi^{5/2} \Omega^{-2} \zeta^{-15/8} U_S \exp\left(i \frac{4}{7} \chi^{-5/4} \Omega \zeta^{7/4}\right) \quad \text{avec}$$

$$U_S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \zeta^{-n/4} \quad \text{et } v_0 = 1 \quad (4.42)$$

Pour obtenir les relations de récurrences entre U_n et V_n , on remplace les solutions (4.41) et (4.42) dans les équations (4.5) et (4.6), on obtient après un certain arrangement :

$$u_n = v_n + 2ai(n-1)v_{n-1} - \left(\frac{(n-1)(n-8) + (33/4)}{4}\right)v_{n-8} \quad (4.43)$$

$$v_n = \frac{-i}{2an} \left(\frac{n(n-7) + 33/4}{4} \right) v_{n-7} - \frac{8ia(n-3)u_{n-6} - 16\Omega^2 u_{n-9} - (n(n-13) + 165/4)u_{n-13}}{16a^2} \quad (4.44)$$

avec $a = \chi^{-5/4}\Omega$

A partir des relations (4.43) et (4.44), on obtient tous les termes U_n et V_n (voir appendice 2)

4.5- Discussion et considérations physiques :

Afin de mieux comprendre les solutions et les modes obtenus π et S , il c'est avéré important de revenir à la source de ces nominations, et tirer les différentes définitions et interprétations physiques nécessaires.

Dans notre étude concernant le fluide magnétique, on a démontré l'existence de deux types d'ondes magnéto-acoustique, les ondes *fast* et les ondes *slow*, ces derniers s'interagissent et se couplent entre eux dans la région où le plasma $\beta \approx C_A/C_S \gg 1$, $\beta \rightarrow \infty$. Lorsque $\beta \rightarrow 0$, c'est à dire loin de la surface magnétique, les deux modes se découpent, le mode *slow* devient le mode d'Alfvén pur, et le mode *fast* devient le mode acoustique pur, par conséquent, on peut dire que le mode P qui caractérise la surface non magnétique du soleil est le mode *fast*. Dans notre cas, nous avons considéré ces solutions comme le mode π avec

$$U_\pi = 1 - \frac{(2\Omega^2 - 3/2)(2\Omega^2 - 1/2)}{4\zeta} + \frac{\chi^{5/2}(2\Omega^2 - 3/2)}{12\zeta^{3/2}\Omega^2} + \dots$$

$$\phi_\pi \approx U_\pi \zeta^{\Omega^2 - 3/4} \exp\left(-\frac{\zeta}{2}\right)$$

Cette solution obtenue est asymptotique au mode acoustique standard P pour une atmosphère non magnétique, ce dernier s'arrête avant le terme $\zeta^{3/2}$ dans la série U_π , et ceci correspond exactement à cette solution obtenue lorsque $\chi \rightarrow 0$ (atmosphère non magnétique $\beta \ll 1$), ceci justifie l'appellation de cette solution par le mode π *fast*.

On peut remarqué aussi que le mode π ignore le champ magnétique avant le terme $\zeta^{-3/2}$ de la série U_π .

L'observation d'oscillations spécifiques au niveau de l'ombre des taches solaires renforce aussi le comportement acoustique qu'on a donné à cette solution, et aussi justifie la nomination « piégé » qu'on a attribué à ce mode.

Pour le mode S , il est intéressant à présent de revenir à la terminologie introduite par Thorne en 1969, et qui concerne l'absorption des oscillations des étoiles à Neutrons par les radiations gravitationnelles, Thorne remarque qu'il existe deux types de solution :

- 1) Solution physique réalisable : le mode quasi - normal.
- 2) Solutions associées « complex outgoing modes ».

Ce dernier type de radiation complexe, absorbe et refroidit tous mouvement au sein de l'étoile à neutron, dans cette solution, le mode d'onde qui arrive de $\zeta = \infty$ ou une onde réfléchi est écarté, Thorne remarque aussi que pour avoir une solution non triviale, il faut que le spectre de la fréquence Ω soit discret.

L'analogie est frappante entre ce que nous avons trouvé comme solution, le mode S , et ce type d'oscillation qualifiée par « complex outgoing modes » :

La solution obtenue est :
$$\phi_S = -\frac{1}{4} \chi^{5/2} \Omega^{-2} \zeta^{-15/8} U_S \exp\left(i \frac{4}{7} \chi^{-5/4} \Omega \zeta^{7/4}\right)$$

Avec
$$U_S = 1 - \frac{\chi^{5/2}}{8 \zeta^{3/2} \Omega^2} - \frac{369 i \chi^{5/4} \Omega}{224 \zeta^{7/4}} + \dots$$

Nous avons dit que la solution π représente le mode piégé, et les observations des taches solaires ont montrées que le couplage P - S se manifeste par une perte d'énergie des ondes P , la diminution de la fréquence des modes P lors du maximum de l'activité solaire, et donc le maximum de l'activité magnétique, ainsi que l'existence de mode propre de 3 minutes. Une explication préliminaire a été invoquée, qui est de dire que le champ magnétique absorbe l'énergie des ondes P , mais comment ?!

C'est ici que l'autre solution, le mode S donne des explications à tous ces points. D'abord on remarque que cette solution dépend fortement du champ magnétique, et ceci à travers la valeur de χ , on remarque aussi que c'est une onde qui se propage, vu le terme complexe de l'exponentielle, on peut alors stipuler l'explication suivante :

Lors de son interaction avec la tache solaire, le mode P est piégé par la cavité sub-photosphérique, il devient le mode π piégé, le champ magnétique va intervenir à travers le mode S , ainsi, il va absorber une fraction de l'énergie du mode π . En étant toujours piégé, le mode π en interaction avec le mode S nous donne la fréquence caractéristique de 3 minutes.

Le mode S ne possède pas de point de réflexion, d'abord par ce qu'il dépend fortement du champ magnétique, donc il est astreint à suivre la configuration de ces lignes, et surtout à cause du comportement de cette solution ; pour $\beta \rightarrow \infty$, nous avons $k = 1/\lambda \rightarrow \infty$, et donc $\lambda \rightarrow 0$; la longueur d'onde étant très petite, on peut dire alors que le mode S ne voit pas la stratification, et il se comporte comme une onde magnétoacoustique, nous avons déjà étudié ces ondes pour $\beta \rightarrow \infty$ (Abdelatif, thèse de doctorat, 1985), ces dernières sont majoritairement transversales de polarisation, et se propagent librement le long du champ magnétique avec une longueur d'onde verticale qui décroît avec la profondeur comme $\lambda_{\perp} \sim C_A/\omega$ avec $C_A \sim 1/z$, donc l'onde va suivre le champ magnétique en voyant sa longueur d'onde diminuer avec la profondeur, ceci explique largement le fait qu'on a écarté les ondes venant de l'infini pour ce mode, et on a laissé que le terme en $\exp(\sim i \Omega \zeta)$.

Vu que le mode S absorbe l'énergie du mode P piégé, alors nécessairement les fréquences d'oscillations sont complexes (Spruit, 1992).

Généralement, la partie imaginaire de la fréquence Ω est négative, car le contraire indique une instabilité, ce qui n'est pas connu actuellement (Spruit et Bogdan, 1993)

En réalité, le phénomène d'absorption et de refroidissement des ondes doit être aussi traité dans l'espace (Roberts et Boardman, 1962), pas uniquement dans le temps comme nous l'avons fait, physiquement la situation $\text{Im}(\Omega) < 0$ indique une perte d'énergie temporelle, celle-ci résulte du flux d'énergie qui s'éloigne et qui est transporté par le mode S .

Ce comportement de la solution S nous amène à tirer le maximum de bénéfice des séries asymptotiques U_S et V_S , et tronquer les au point optimal (Voir Appendice 4).

La conversion de mode $P \rightarrow S$ a été donc introduite la 1^{ère} fois par Thorne en 1969, pour expliquer l'absorption des oscillations des étoiles à Neutron par les radiations gravitationnelles, puis, Biront et al (1982); Robert et Soard (1983) ont évoqué le même processus de conversion $P \rightarrow S$ pour justifier le refroidissement des oscillations stellaires, et finalement, ce même processus a été utilisé par Spruit 1991 dans le cas du soleil.

4.6-Algorithmme de résolution numérique et Relation de dispersion :

Nous avons obtenus la relation de dispersion $\Omega = f(\chi)$ pour le cas non magnétique, maintenant nous allons chercher cette dernière dans le cas d'une atmosphère magnétique, ceci revient à déterminer les valeurs propres Ω à partir des deux équations différentielles couplées (4.5) et (4.6), mais vu la complexité du problème, on ne peut pas déterminer analytiquement cette relation, d'où le recours à une méthode numérique.

Le principe de cette méthode est simple, l'intervalle où le problème de valeur propre est posé ($\zeta = 0$ à $\zeta = \infty$) sera divisé en deux régions, soit ζ_m le point qui assure la continuité de la solution entre les deux régions, c'est le *point de correspondance des fonctions* (Matching point), donc nos deux intervalles sont :

$$\zeta = 0 \longrightarrow \zeta = \zeta_m \quad \text{et} \quad \zeta = \zeta_m \longrightarrow \zeta = \infty$$

On peut donc écrire toutes les solutions sous cette forme :

$$\begin{aligned} \phi &= \beta_A \phi_A + \beta_B \phi_B \\ & \zeta < \zeta_m \end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\Psi = \beta_A \Psi_A + \beta_B \Psi_B$$

$$\begin{aligned} \phi &= \beta_S \phi_S + \beta_\pi \phi_\pi \\ & \zeta > \zeta_m \end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\Psi = \beta_S \Psi_S + \beta_\pi \Psi_\pi$$

La méthode asymptotique de correspondance (Asymptotic Matching) est utilisée en stipulant que les solutions ainsi que leurs dérivées sont les mêmes au niveau de $\zeta = \zeta_m$

En écrivant la même chose pour les dérivées de ϕ et Ψ , et en appliquant la condition de correspondance, nous obtenons pour $\zeta = \zeta_m$:

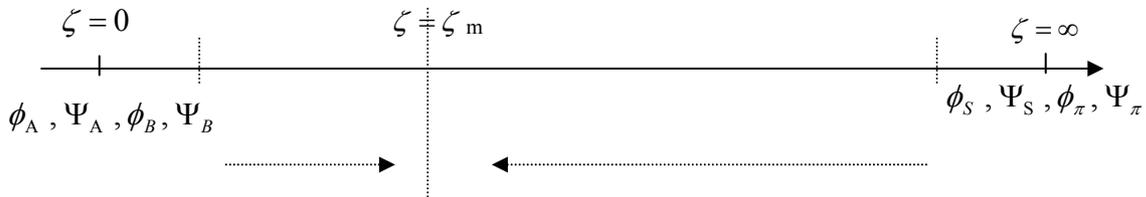
$$\beta_A \begin{pmatrix} \phi_A \\ \Psi_A \end{pmatrix}_{\zeta_m} + \beta_B \begin{pmatrix} \phi_B \\ \Psi_B \end{pmatrix}_{\zeta_m} = \beta_S \begin{pmatrix} \phi_S \\ \Psi_S \end{pmatrix}_{\zeta_m} + \beta_\pi \begin{pmatrix} \phi_\pi \\ \Psi_\pi \end{pmatrix}_{\zeta_m}$$

$$\beta_A \begin{pmatrix} \phi'_A \\ \Psi'_A \end{pmatrix}_{\zeta_m} + \beta_B \begin{pmatrix} \phi'_B \\ \Psi'_B \end{pmatrix}_{\zeta_m} = \beta_S \begin{pmatrix} \phi'_S \\ \Psi'_S \end{pmatrix}_{\zeta_m} + \beta_\pi \begin{pmatrix} \phi'_\pi \\ \Psi'_\pi \end{pmatrix}_{\zeta_m}$$

Les β sont des constantes.

Nous avons déjà déterminé les solutions proche du point $\zeta = 0$ et les solutions asymptotiques pour $\zeta \rightarrow \infty$. Les solutions pour $\zeta = 0 \rightarrow \zeta = \zeta_m$ ainsi que $\zeta = \infty \rightarrow \zeta = \zeta_m$ sont obtenues par intégration numérique des équations différentielles en utilisant la méthode RK44 d'ordre 4 (Appendice 3) :

- On intègre numériquement ϕ et Ψ de $\zeta \ll 1$ jusqu'à $\zeta = \zeta_m$.
- On intègre numériquement dans la direction inverse ϕ et Ψ de ζ assez large qui assure une bonne précision aux solutions asymptotiques S et π jusqu'à ζ_m .



Ce qui est équivalent en notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \phi_A & \phi_B & \phi_S & \phi_\pi \\ \Psi_A & \Psi_B & \Psi_S & \Psi_\pi \\ \phi'_A & \phi'_B & \phi'_S & \phi'_\pi \\ \Psi'_A & \Psi'_B & \Psi'_S & \Psi'_\pi \end{pmatrix}_{\zeta_m} \begin{pmatrix} -\beta_A \\ -\beta_B \\ \beta_S \\ \beta_\pi \end{pmatrix} = 0 \quad (4.47)$$

Ce système admet des solutions si et si seulement le déterminant de la matrice 4×4 , le Wronskien W est nul. Ainsi, en affectant des valeurs spécifiques à χ , on cherche les valeurs de Ω qui satisfont à la condition $W = 0$, ceci va sélectionner un spectre discret de valeur

propre Ω , donc la condition $W = 0$ revient à chercher tous les couples (Ω, χ) qui vérifient cette équation.

Etant donné que les séries U_S, V_S, U_π, V_π sont des séries asymptotiques, il faut les tronquer dans le bon ordre en ce point ζ_m et $\zeta \rightarrow \infty$, et ceci afin d'assurer une meilleure précision des fonctions $\phi_S, \Psi_S, \phi_\pi, \Psi_\pi$, puis remplacer ces derniers dans la matrice 4×4 , et enfin, calculer le déterminant de cette matrice et chercher les fréquences qui l'annulent.

Le point ζ_m est fixé dès le début de l'algorithme, il est ajusté afin d'obtenir les fréquences non magnétique pour $\chi = 0.1$. Physiquement, il correspond à la profondeur pour laquelle $z = -L$.

La première valeur de Ω déterminée pour $\chi = 0.2$ va servir comme une valeur initiale au prochain χ , puis recommencer tous les étapes indiquées ci dessus et ainsi de suite jusqu'à obtenir la totalité du diagramme $\Omega = f(\chi)$.

4.6.1-Résolution numérique de la fonction du déterminant :

La fonction du déterminant n'étant pas explicite, il faut utiliser des méthodes beaucoup plus générales afin de chercher des solutions complexes.

Au début, nous avons opté pour les méthodes d'optimisation les plus simples, entre autres, la méthode de la section d'or (Golden section search) et la méthode de Brent, ces derniers présentent trois problèmes :

- 1-Beaucoup d'erreurs numériques et convergence très lente.
- 2-Ces méthodes généralement détectent aussi les maxima de la fonction, d'où l'abondance des solutions qu'on a trouvé, en plus, les minima ne sont pas nécessairement tous des solutions.

Ceci ne nous a pas encouragé à chercher d'avantage dans les autres méthodes plus compliquées qui utilisent les dérivés, d'où le recours aux méthodes standard qui cherchent les racines des polynômes.

Bien que adapté aux solutions complexes, La méthode de Newton est très lente et dans la plupart des cas ne converge pas.

La méthode de Muller est une version plus générale que celle de la Sécante, elle est fréquemment utilisée pour des fonctions analytiques arbitraires, à chaque étape, trois points sont utilisés comme valeurs initiales. Cette méthode détermine le polynôme quadratique qui passe par ces trois points, et après, on cherche les racines de cette équation, et enfin, on

choisit l'une de ces solutions pour remplacer le dernier point, et ainsi de suite recommencer à nouveau le calcul (Numerical recipes, Press et al, 1986-1992).

L'avantage de cette méthode c'est que la convergence est très rapide, et surtout, le plus intéressant c'est que le polynôme quadratique peut avoir des solutions complexes, dans ce cas, elle est très bien adaptée à ce que nous recherchons, et elle donne des bon résultats, avec une erreur relative de 10^{-5} , et des itérations qui ne dépassent pas le nombre de 10.

Les solutions retenues sont uniquement celles qui correspondent à une partie imaginaire négative, ces derniers sont les seules à avoir un sens physique (voir discussion des solutions).

Conclusion générale et perspectives :

Notre présent travail consiste à déterminer les différents modes d'oscillations qui peuvent exister dans une atmosphère polytrophe, stratifiée, adiabatique et parfaitement conductrice, traversée par un champ magnétique uniforme et vertical, pour cela, on a étudié en premier lieu les ondes magnéto-acoustiques, ces derniers étant une version simplifiée des ondes Magnéto-Atmosphériques, ainsi, on a conclu l'existence de deux types de mode, le mode *fast* et le mode *slow*, les caractéristiques de ces modes dépendent de l'intensité du champ magnétique à travers un paramètre très important β , avec $\beta \approx C_A / C_S$, C_A et C_S sont les vitesses d'Alfvén et acoustique respectivement.

A partir des équations MHD perturbées, on a établi les équations MAG : Magnéto-Acoustique-Gravité, celles-ci gouvernent les ondes Magnéto-Atmosphériques. En adoptant le même modèle atmosphérique que celui de Cally et Bogdan 1993, et en cherchant à résoudre les équations MAG, on a trouvés deux types de solutions ; le mode π qui est le mode fast, et le mode S qui est le mode Slow, ces deux modes se couplent dans un polytrophe magnétique.

Concernant le polytrophe magnétique, et pour un nombre d'onde fixe et réel, on a obtenu des fréquences propres complexes et discrètes $\omega_n - i\Gamma_n$, ces dernières correspondent à des oscillations qui s'atténuent avec le temps, ce phénomène d'absorption de radiation est le fait du mode magnétique slow S qui se propage le long des lignes du champ magnétique, en drainant l'énergie du mode fast π qui est piégé. Nous avons démontré que le couplage $\pi - S$ est très efficace lorsque $\beta \approx 1$, c'est à dire la vitesse adiabatique du son est de l'ordre de la vitesse d'Alfvén.

Pour un nombre d'onde horizontal $k < L^{-1}$, L étant la profondeur caractéristique de l'atmosphère magnétique pour laquelle on a $C_A(L) = C_S(L)$, la partie réelle des fréquences propres varie comme $\omega \sim \sqrt{gk}$, celle-ci correspond au mode acoustique standard P .

Pour $k > L^{-1}$, la courbe de dispersion devient approximativement $\omega \sim k\sqrt{gL}$, à travers cette dernière, on trouve plusieurs fréquences discrètes dont la partie imaginaire Γ tend vers 0, celles-ci représentent des modes propres d'oscillation qui oscillent avec une longue durée de vie. Le calcul de la période T pour une bande de modes propres donne une plage de $T \approx 163$ à 178.6 secondes, ce qui est en bon accord avec la période de 3 minutes qui caractérise les oscillations propres dominantes observées dans l'ombre d'une tache solaire.

En général, on peut dire que le mécanisme de conversion P à Slow mode qu'on a adopté et mieux compris, et explique beaucoup de phénomènes observés au niveau de la surface solaire, comme les résultats qu'on a trouvés, cependant, son application pour des structures complexes du champ magnétique est avéré très difficile (Cally, 2000). Aussi, cette conversion de mode n'arrive pas à expliquer les observations qui concernent l'absorption de certains modes P (Cally, Crouch et Braun, 2003), ces derniers ont la plus grande partie de leurs énergies dans la région inférieure à $\beta \approx 1$ où le processus de conversion prend place.

Bien que le modèle qu'on a utilisé nous a permis de comprendre les oscillations dans l'ombre des taches solaires, il souffre de 2 défauts, d'abord, on avait posé que le champ magnétique est toujours parallèle à l'accélération gravitationnelle, alors que les observations montrent que ce dernier présente une significative inclinaison surtout à la limite ombre – pénombre (Crouch & Cally, 2003), le deuxième défaut dans notre modèle est qu'on a pas tenu compte du couplage entre les oscillations internes de l'ombre ; le mode π , et les oscillations externes de la surface non magnétique ; le mode P , cette interaction est très compliqué mathématiquement (Barnes & Cally, 2000). On peut ajouté à cela qu'on a négligé les termes de viscosité, la diffusion magnétique et thermique du fluide.

En réalité, une atmosphère polytrophe n'est pas la plus dominante dans l'ombre d'une tache solaire, il existe d'autres couches où la variation de température avec la profondeur est beaucoup plus complexe (Maltby et al.1986).

Dans notre future modèle, on tiendra compte de certaines insuffisances citées ci dessus, on va utiliser un autre profile de température afin de mieux cerner les autres phénomènes qui n'apparaissent pas dans un polytrophe.

A travers la surface solaire, c'est souvent de trouver une intense concentration de champ magnétique vertical, il est intéressant de suggérer que le même processus d'absorption du mode P par le champ magnétique peut prendre place dans ce cas bien précis, et ne se limite pas uniquement au niveau de l'ombre des taches solaires, ainsi, en perspectives, nous tenterons de rechercher à travers la surface solaire, et dans les régions actives des phénomènes similaires.

Nous pensons que le mécanisme d'absorption d'énergie des oscillations acoustiques solaires contribue à l'équilibre énergétique des régions actives et les autres couches telle que la chromosphère et la couronne, et fait partie du processus encore mal connu du réchauffement de la couronne par l'intermédiaire des oscillations photosphériques et chromosphériques, par conséquent, c'est possible que l'absorption des modes P par les taches solaires ne serai qu'une

manifestation particulière d'un phénomène physique beaucoup plus globale, ça sera l'un des objectifs de notre futur travail.

Apport et contribution :

L'étude qu'on a faite sur les ondes Magneto-Atmosphériques rentre dans le cadre d'un projet de recherche sur l'activité solaire au sein du CRAAG. La complexité du soleil rend une éventuelle étude globale et directe une tâche très difficile, pour cela, différentes études ont été entrepris ou il sont au cours de finalisation au sein du groupe activité solaire afin de décrire les différentes manifestation du champ magnétique sur des échelles variées de l'atmosphère solaire : instabilités magnétiques, vents solaires, réchauffement de la couronne ...etc.

Nous pensons que le processus de réchauffement de la couronne est dû au transfert des oscillations à partir des taches solaires vers la chromosphère et la couronne, d'où notre apport et contribution qui consiste à étudier les ondes Magneto-Atmosphériques dans la couche de convection. Dans un avenir proche, nous allons unifier entre les différentes recherches qui ont été faites sur les différentes couches et ainsi contribuer à élaborer un modèle théorique qui tient compte des observations et qui explique certains phénomènes encore mal compris.

Les méthodes mathématiques utilisées lors de ce travail nous a permis de se familiariser avec les procédures analytiques les plus puissante, nous avons aussi élaboré un model et un algorithme mathématique très pratique qui peut servir à d'autres études plus approfondies.

4.7-Résultats et discussion :

La figure (4.2) représente le tracé de la partie réelle du carré de la fréquence complexe Ω^2 en fonction du vecteur d'onde χ , les modes sont notés respectivement $f, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$, f étant le mode fondamental, et les autres modes sont notés par le symbole π_n afin de marquer la différence par rapport au mode acoustique standard P .

Lorsque $\chi \rightarrow 0$, toutes les courbes tendent vers les fréquences obtenues dans le cas non magnétique $\Omega_n^2(0)$. Mise à part le premier et le troisième harmonique, toutes les pentes des autres modes ont tendances à augmenter à partir d'un certain χ .

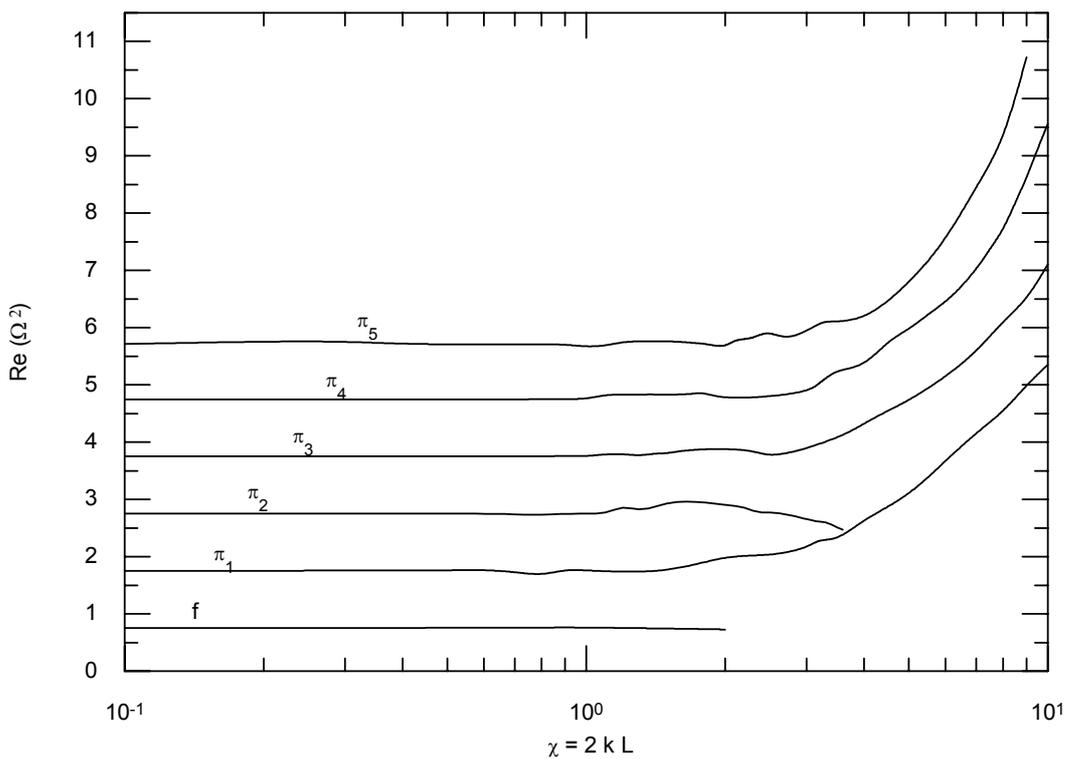


Figure 4.2 : Courbe de dispersion de la partie réelle de la fréquence Ω^2

La figure de (4.3) concerne les courbes de dispersion de la partie imaginaire de Ω^2 en valeur absolue. Les parties imaginaires augmentent généralement avec la valeur de χ , mais on constate que la courbe de la partie imaginaire présentent des minimums locaux qui tendent

pratiquement vers zéro pour certaines valeurs de χ , ceci implique que dans ces points particuliers et isolés, le couplage entre les deux modes π et S est très faible. Ces *modes normales* ou *modes propres d'oscillations* oscillent avec une fréquence réelle et possèdent une longue durée de vie, ils constituent ainsi les modes π piégés de notre atmosphère, ils sont représentés dans les figures (4.8) et (4.9) sous forme de petits cercles.

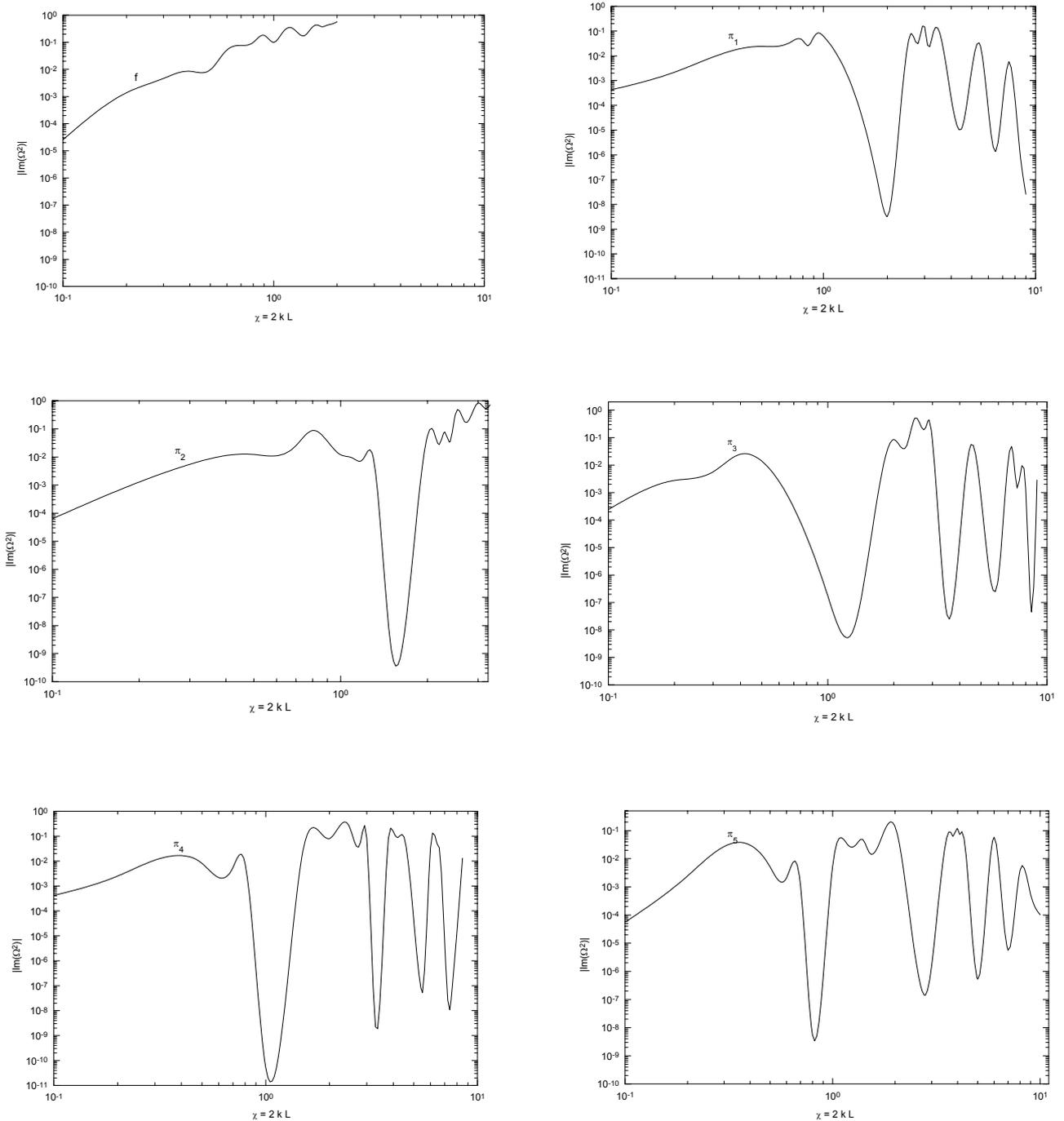


Figure 4.3 : Courbes de dispersion de la partie imaginaire de la fréquence Ω^2

Commençons d'abord à interpréter le comportement du mode π_2 , la figure (4.4) représente le tracé de la partie réelle, avec une échelle assez réduite, on peut mieux discerner les détails qui ne sont pas visible dans la figure(4.2). Ce mode est intéressant car à partir de ses deux courbes d'un aspect simple, on peut avoir des informations précises sur la relation existante entre la partie réelle et la partie imaginaire. D'abord on remarque que la partie imaginaire ne cesse d'augmenter à partir de la valeur 10^{-5} jusqu'à 10^{-1} , en parallèle, la partie réelle entame un parcours constant jusqu'à $\chi \approx 0.5$, avec une partie imaginaire 10^{-2} , puis elle descend jusqu'à $\chi \approx 0.8$.

A partir de $\chi \approx 0.8$, la partie imaginaire diminue jusqu'à $\chi = 1.5$, puis remonte à nouveau, ce minimum a permis à la partie réelle de remonter un petit peu pour atteindre un maximum à la même valeur, mais elle redescend encore à cause de la partie imaginaire qui augmente indéfiniment.

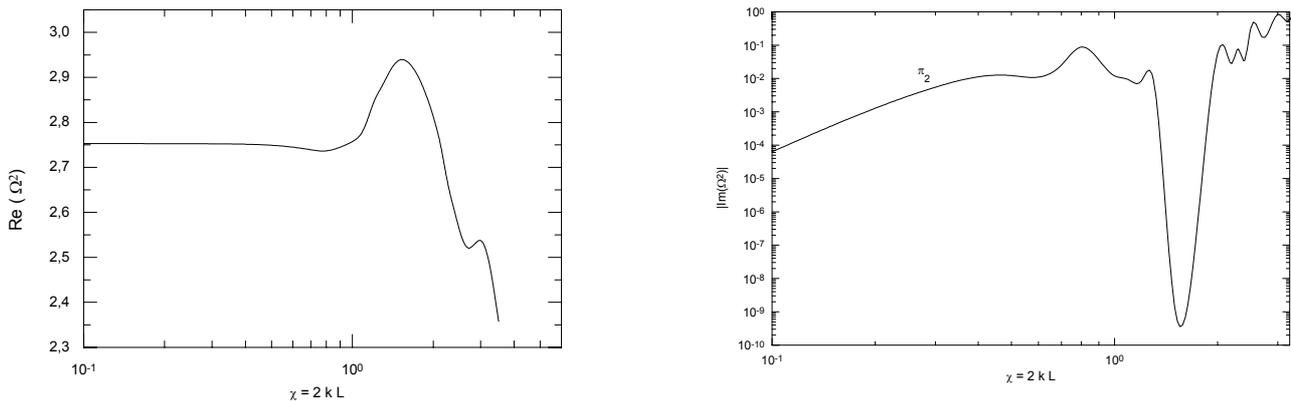


Figure 4.4 : Courbe de dispersion de la partie réelle de Ω^2 (à gauche) et celle de la partie imaginaire de Ω^2 (à droite) pour le mode π_2

Nous avons déjà expliqué que le mode Slow absorbe une partie d'énergie des modes fast π , ce mécanisme rend la partie imaginaire négative, et dans ce cas précis, on a une manifestation de ce phénomène, en augmentant d'un facteur de 10000, l'absorption par le mode S est si élevé qu'elle affecte le mode π , ainsi, ce dernier commence à s'atténuer et voit sa partie réelle diminuer jusqu'à $\chi \approx 0.8$, remonte légèrement puis redescend indéfiniment pour disparaître totalement.

Pour les courbes de $\pi_1, \pi_3, \pi_4, \pi_5$, on remarque qu'il existe déjà des minimums à $\chi = 2, 1.3, 1, 0.85$ respectivement, et au fur et à mesure que la partie imaginaire augmente, on trouve d'avantage d'autres minimums, ceci explique le fait que les courbes de la partie réelle ne s'atténuent pas comme le cas du mode π_2 , et continuent leurs évolutions.

On remarque que le mode f a un comportement différent des autres modes, afin de mieux vérifier ceci, on propose une autre méthode pour chercher les fréquences propres et déterminer la courbe de dispersion, pour cela, il faut revenir à l'équation :

$$P[\phi] \equiv \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} + \frac{m}{\zeta} \frac{d\phi}{d\zeta} + \left(\frac{\Omega^2}{\zeta} - \frac{1}{4} \right) \phi = \frac{1}{4} \psi$$

nous avons pour $\chi < 1$, les fréquences complexes sont suffisamment proches de ceux du polytrope non magnétique qu'on peut utiliser la méthode des perturbations :

Nous avons déjà résolu l'équation $P[\phi]$ dans le cas non magnétique, nous avons trouvé que $\phi_n(\zeta) \approx \zeta^{-m/2} \Phi = e^{-\zeta/2} L_n^\alpha(\zeta)$ avec $\Omega_n^2(0) = n + m/2$ et $L_n^\alpha(\zeta)$ représente le polynôme de Laguerre de degré n , avec $\alpha = m - 1$.

On remplace la fonction $\phi_n(\zeta)$ dans l'équation non homogène $S[\psi]$, on obtient ainsi la fonction $\psi(\zeta) = \psi_n(\zeta)$.

On remplace la solution $\psi_n(\zeta)$ dans le membre droite de l'équation $P[\phi]$, ainsi que la fréquence $\Omega_n^2 = \Omega_n^2(0) + \Delta\Omega_n^2(\chi)$, et ceci pour corriger la fonction $\phi_n(\zeta)$, ce qui revient à écrire :

$$\phi_n'' + \frac{m}{\zeta} \phi_n' + \frac{\Omega_n^2(0)}{\zeta} \phi_n + \frac{\Delta\Omega_n^2(\chi)}{\zeta} \phi_n = \frac{1}{4} \psi_n$$

Or dans le cas non magnétique, on a le terme $\phi_n'' + \frac{m}{\zeta} \phi_n' + \frac{\Omega_n^2(0)}{\zeta} \phi_n = 0$

d'où le résultat :

$$\frac{\Delta\Omega_n^2}{\zeta} \phi_n = \frac{1}{4} \psi_n \quad (4.48)$$

En multipliant les deux cotés de l'équation (4.48) par $\zeta^{\alpha+1} \phi_l(\zeta)$ avec

$\phi_l(\zeta) = e^{-\zeta/2} L_l^\alpha(\zeta)$, et en intégrant de 0 à l'infini on obtient l'équation intégrale :

$$\Delta\Omega_n^2 \int_0^\infty e^{-\zeta} L_n^\alpha(\zeta) L_l^\alpha(\zeta) \zeta^\alpha d\zeta = \frac{1}{4} \int_0^\infty \zeta^{\alpha+1} \psi_n \phi_l d\zeta \quad (4.49)$$

avec $\alpha = m - 1$

Or nous avons la relation d'orthogonalisation pour les polynômes de Laguerre :

$$\int_0^\infty e^{-z} L_n^\alpha(z) L_m^\alpha(z) z^\alpha dz = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(n + 1)} \delta_{n,m}$$

$\Gamma(x)$ étant la fonction gamma.

L'équation (4.49) devient

$$\Delta\Omega_n^2 \frac{\Gamma(m + n)}{\Gamma(n + 1)} \delta_{n,l} = \frac{1}{4} \int_0^\infty \zeta^m \psi_n \phi_l d\zeta$$

Finalement, pour $n = l$, on obtient le résultat suivant :

$$\Delta\Omega_n^2(\chi) = \frac{1}{4} \frac{\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + m)} \int_0^\infty \zeta^m \phi_n(\zeta) \psi_n(\zeta) d\zeta + \dots \quad (4.50)$$

Cette méthode a été utilisée par Spruit et Bogdan en 1992 pour démarrer l'intégration numérique, elle est valable pour un champ magnétique relativement faible, dans notre cas, cette approche est beaucoup plus simple pour le mode f , ce dernier présente la particularité que la fonction $\phi(\zeta)$ est simple :

$$\phi(\zeta) = e^{-\zeta/2}$$

ainsi que la fréquence non magnétique pour $n = 0$:

$$\Omega_0^2(0) = m / 2$$

en plus, le mode f est sensible même aux champs magnétiques faibles, vu le résultat qu'on a obtenu à travers la partie imaginaire.

La solution homogène pour $\psi(\zeta)$ étant :

$$\psi(\zeta) \approx \frac{7}{4\Omega} \chi^{5/4} \zeta^{-5/4} \exp\left(i \frac{4}{7} \chi^{-5/4} \zeta^{7/2}\right)$$

en première approximation , on peut écrire $\psi(\zeta) \approx \psi_s(\zeta)$, avec

$$\psi_s \approx \zeta^{-3/8} \exp\left(i \frac{4}{7} \chi^{-5/4} \Omega_0 \zeta^{7/4}\right)$$

cette dernière étant une solution valide pour $\zeta \rightarrow \infty$.

En négligeant les autres termes par rapport au premier qui est le plus important, on peut utiliser maintenant l'intégrale (4.50) pour chercher les valeurs propres, donc on peut écrire :

$$\Delta\Omega_0^2(\chi) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \zeta^{-9/8} e^{\left(\frac{\zeta}{2} + i \frac{2}{7} \chi^{-5/4} \sqrt{3} \zeta^{7/4}\right)} d\zeta \quad (4.51)$$

L'intégration numérique de (4.51) nous a permis de tracer les courbes de dispersion, les parties réelles et imaginaires sont représentées dans les figures (4.5) et (4.6) respectivement.

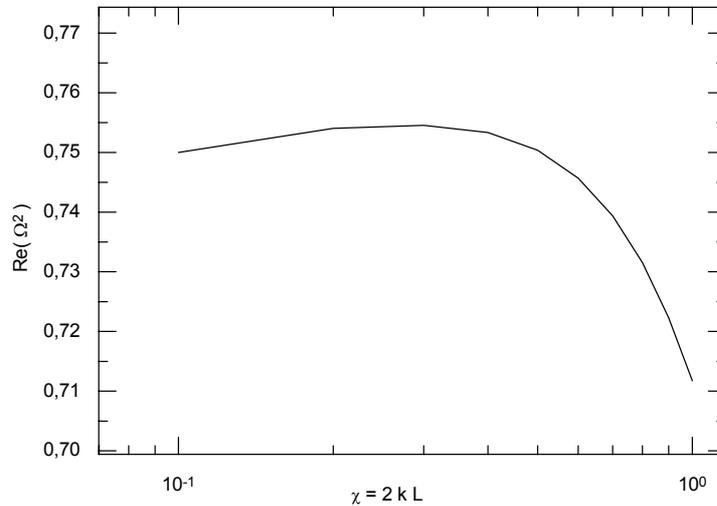


Figure 4.5 : Courbe de dispersion de la partie réelle de Ω^2 pour le mode f

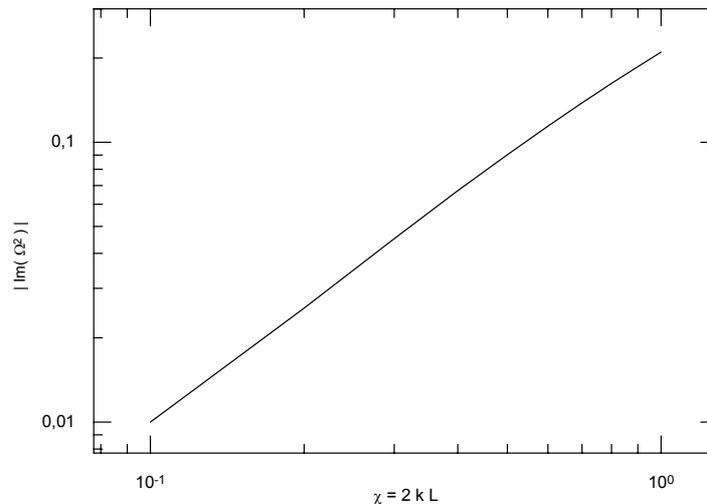


Figure 4.6 : Courbe de dispersion de la partie imaginaire de Ω^2 pour le mode f

On voit que la courbe de la partie réelle augmente jusqu'à $\chi = 0.3$, puis redescend indéfiniment, en parallèle, la partie imaginaire ne cesse d'augmenter, ainsi, ceci confirme l'atténuation et l'absorption du mode fondamental f par mode S , et aussi rejoint les résultats qui ont été déjà trouvés. Les observations ont montrées que le mode f est partiellement absorbé par les taches solaires (Lites et al.1993.)

Le facteur de qualité Q est donné par le relation $Q = \frac{Re(\Omega^2)}{2\pi Im(\Omega^2)}$, un maximum local

dans cette courbe indique un minimum d'absorption, et donc présente un mode propre d'oscillation, alors que un minimum local correspond à une forte interaction et un puissant couplage entre les deux mode π et S . La figure (4.7) représente la variation de ce facteur en fonction de χ .

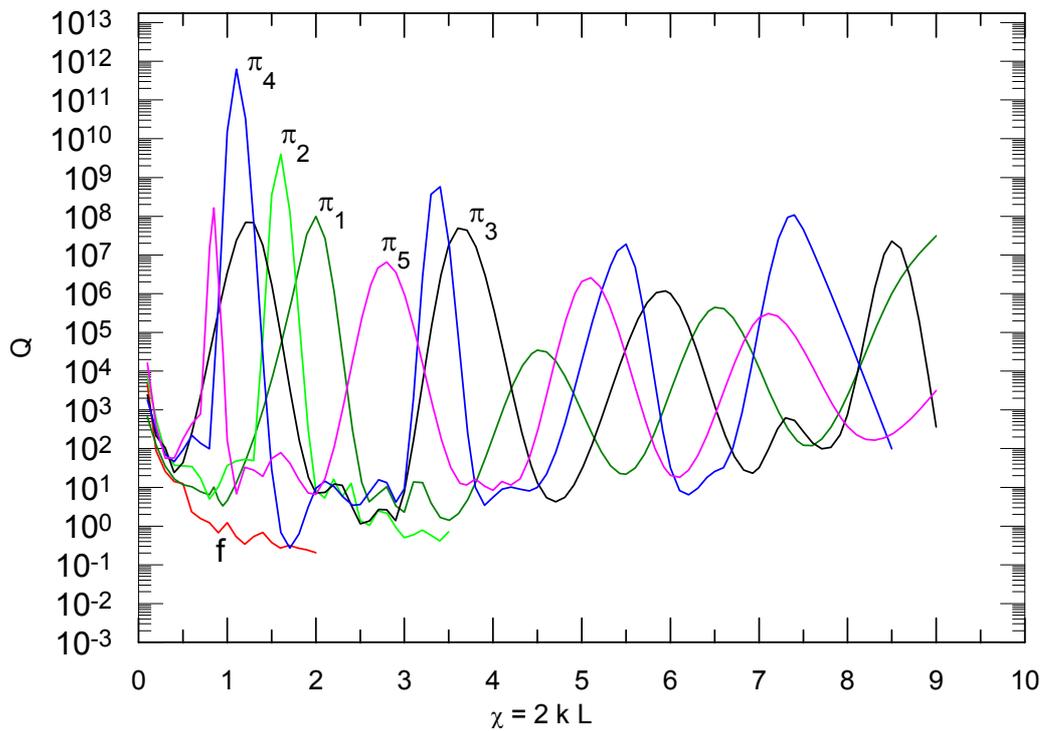


Figure 4.7: Courbe de variation du facteur da qualité

Si on observe la variation de Q pour un mode particulier, on constate que le facteur de qualité passe par des minimums pour une variation de χ de l'ordre de 2, de ce fait, le vecteur d'onde vari comme $k \approx \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{L}$ où λ est la longueur d'onde, ce résultat nous conduit à une conclusion très importante : à l'intérieur de la cavité résonante où le mode π est piégé, on a un maximum de couplage $\pi - S$ que pour les profondeurs z de l'ordre de L , par conséquent, le couplage entre les deux modes π et S est très efficace dans la région qui correspond à $\beta \approx 1$ où la vitesse du son est égale à celle d'Alfven.

Nous avons vu au chapitre (3) qu'on peut écrire l'expression de la fréquence sous la forme :

$$\omega(L/g)^{1/2} = \left(\frac{2}{3} \chi \Omega^2 \right)^{1/2}$$

On peut écrire aussi $\omega(L/g)^{1/2} = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{L}{g} \right)^{1/2}$

dans une tache solaire , nous avons $g = 274 \text{ m s}^{-2}$. Le modèle numérique de Pizzo (1986) estime la valeur de L à 600 km, cette profondeur correspond à la *dépression de Wilson* dans une tache solaire, l'application numérique donne :

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega(L/g)^{1/2}}{294.022} = \frac{\left(\frac{2}{3}\chi\Omega^2\right)^{1/2}}{294.022} \quad \text{avec} \quad k = \frac{\chi}{1.2} \text{ Mm}^{-1}$$

La figure (4.8) représente la courbe de dispersion réelle de la fréquence et en même temps l'inverse de la période en fonction du vecteur d'onde k en mégamètre⁻¹ (Mm^{-1}). Les petits cercles présents sur les courbes correspondent aux modes propres.

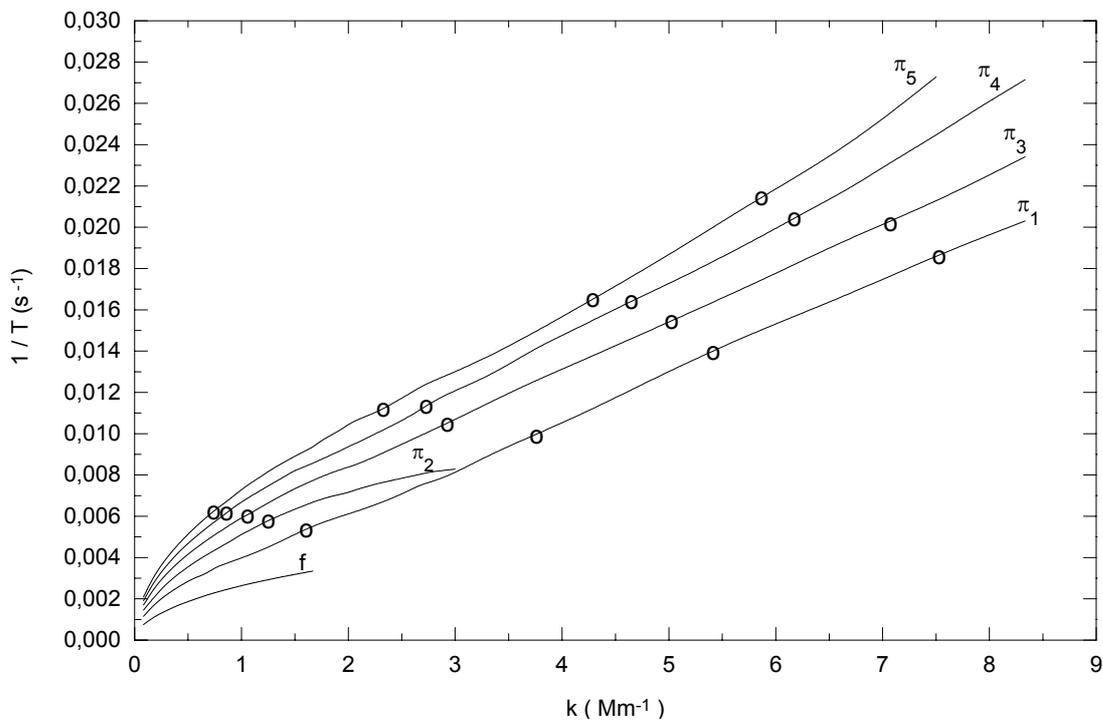


Figure 4.8 : Courbe de dispersion représentant l'inverse de la période $1/T$ en fonction du vecteur d'onde k en mégamètre⁻¹ (Mm^{-1}) pour $L=600$ km.

Comme nous l'avons déjà indiqué pour la figure (4.2), la valeur de $\chi \approx 2$ marque le changement et le passage du cas non magnétique au cas magnétique, on constate que à partir de cette valeur, les courbes des différents modes tendent vers une droite dont la pente est pratiquement la même, le calcul de l'équation de la droite donne la relation de dispersion :

$$\omega \sim k \sqrt{gL}$$

Approximativement c'est l'expression de la vitesse d'Alfvén obtenue dans l'équation (3.7).

Dans la figure (4.8), on remarque que les modes propres sont repartis sous forme de bandes, pour les désignés, on peut caractériser chaque mode propre par deux indices, le premier indice est le nombre horizontal n qui est le nombre d'harmonique, le second indice est le nombre vertical ℓ qui est le numéro du mode propre sur la même harmonique, ce qui donne pour un mode propre la nomenclature (n, ℓ) , Figure (4.9)

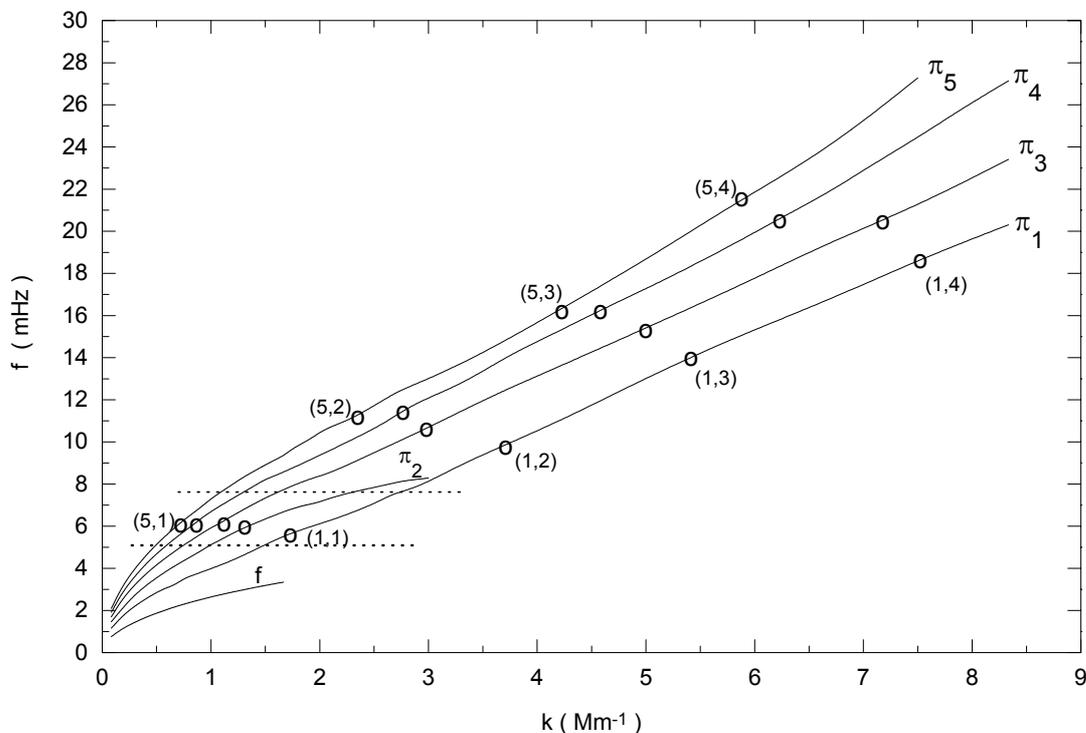


Figure 4.9 : Courbe de dispersion qui représente la fréquence en mHz en fonction du vecteur d'onde k , la région délimitée par les deux droites pointillées correspond approximativement à la position des oscillations de 3 minutes observées par l'instrument ASP.

Les observations de ASP (Advanced Stokes Polarimeter , Vacuum Tower Telescope , NSO/ Sacramento Peak Observatory, (15 octobre 1995) localisent approximativement les oscillations de 3 minutes entre 4.5 et 7 mHz, soient entre 143 et 222 s. Dans la figure (4.9), on a tracé deux droites pointillées pour limiter la région qui correspond aux oscillations de 3 minutes observées par l'instrument ASP.

On remarque que seul les modes propres de la 1^{ère} bande ($\ell=1$) qui sont désignés par $(n, \ell) = (1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1)$ se situent dans cette limite et donc peuvent osciller avec la fréquence de 3 minutes. On peut résumer ceci dans le tableau (4.1):

Le mode	Le vecteur d'onde k (Mm^{-1})	Désignation du mode propre d'oscillation (n, ℓ)	La période calculée T (s)	La fréquence calculée (mHz)
π_1	1.66	(1, 1)	178.6	5.60
π_2	1.25	(2, 1)	171.8	5.82
π_3	1.08	(3, 1)	163.0	6.14
π_4	0.83	(4, 1)	165.3	6.05
π_5	0.70	(5, 1)	168.6	5.93

Tableau (4.1)

La plage de période donnée par T rejoint bien la période d'oscillation de 3 minutes observée dans l'ombre des taches solaires. A titre de comparaison, Scheuer et Thomas en 1980 dans leurs modèles à deux couches ont trouvés une période de 153 s, Cally et Bogdan en 1993 ont obtenus une plage de 147 à 184 s. En 1998, Lites et al. ont constatés dans leur étude théorique qu'il existe plusieurs fréquences critiques ; $T = 192$ s, $T = 150$ s, $T = 131$ s qui correspondent à un minimum local dans la variation de Q , donc la valeur obtenue est en bonne concordance avec les observations récentes ainsi que les travaux théoriques effectués dans ce but.

L'intégration numérique des équations (4.5) et (4.6) nous permet de tracer la vitesse parallèle U_z , ainsi que la partie réelle de la vitesse perpendiculaire U_x en fonction de la profondeur ζ , le mode S étant transversal, il est représenté donc par U_x , et le mode π par U_z .

La figure (4.10) concerne un puissant couplage $\pi - S$ pour un χ spécifique, l'évolution des deux courbes confirme la conversion du mode π en mode S , on remarque l'oscillation très rapide et croissante du mode S , ce dernier absorbe l'énergie du mode π qui est moins rapide et décroissant avec la profondeur.

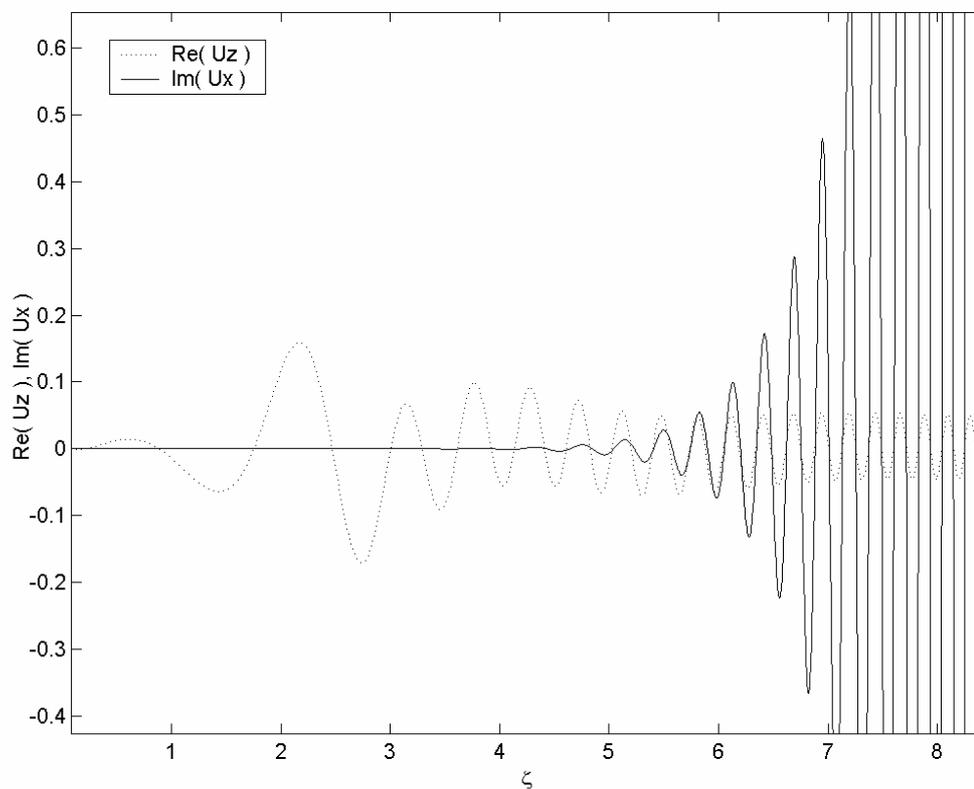


Figure 4.10 : Variation de la partie réelle de U_z et imaginaire de U_x en fonction de la profondeur ζ , ceci concerne un mode avec un couplage $\pi - S$ puissant, la normalisation est faite pour mieux voir l'évolution des deux courbes

La figure (4.11) concerne un mode typiquement propre, celui pour lequel on a calculé la période de 3 minutes $(n, \ell) = (1, 1)$, $\chi = 2$, $\Omega^2 = 2.032 - 3.27 \cdot 10^{-9} i$, on observe un déclin et une faible oscillation du mode S lorsque ζ augmente.

Dans le cas $\zeta < \chi$, c'est à dire en présence d'un champ magnétique puissant, les solutions sont totalement couplées, et le mouvement au sein du fluide est pratiquement aligné avec le champ magnétique, nous avons déjà les équations (4.3) et (4.4) :

$$\delta B_x = B \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

$$\delta B_z = -i k B u_x$$

En réalité, le mode π piégé amplifie la tension et la pression magnétique, ainsi, ces derniers vont soutenir à leurs tours les oscillations transversales contre l'inertie du fluide.

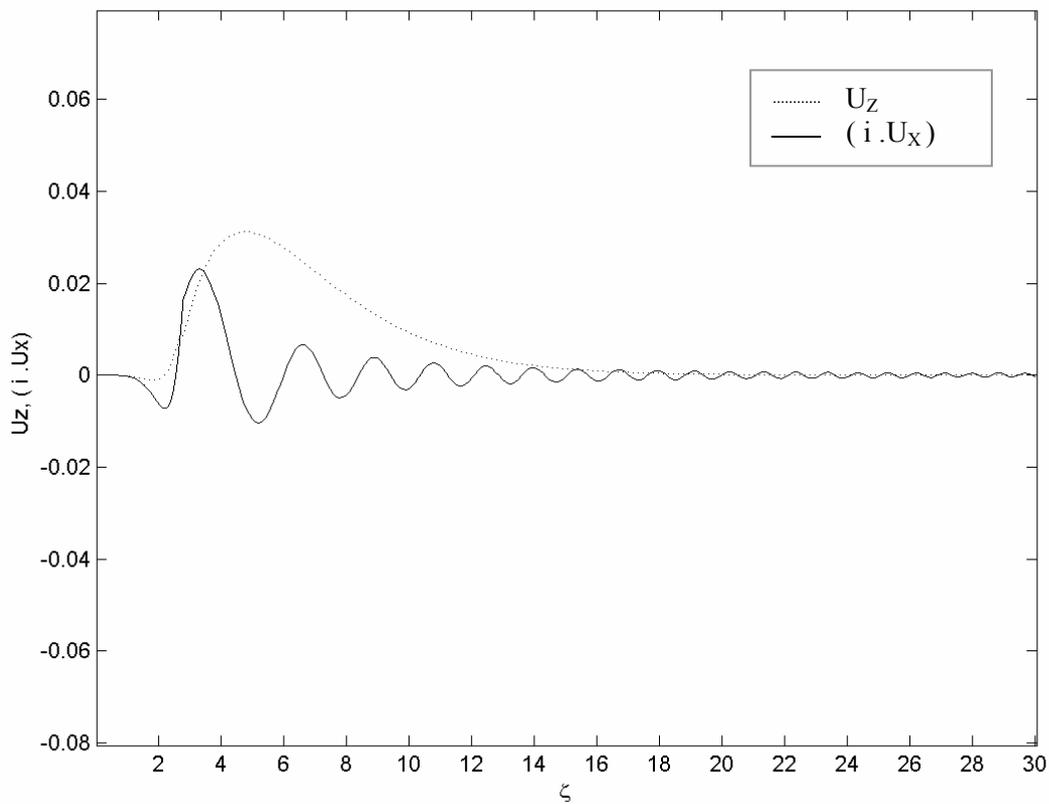


Figure 4.11 : Variation de la partie réelle de U_z et imaginaire de U_x du mode π_1 pour le mode typiquement propre : $\Omega^2 \approx 2.032 - 3.27.10^{-9} i$, $\chi = 2$.

Le terme absorption du mode π par le mode S prôt parfois confusion, en réalité, l'absorption ici ne veut pas dire une transformation en une énergie thermique ou autres, ce mécanisme est une forme de conversion, nous avons vu que dans l'atmosphère non magnétique ($L \rightarrow 0$), les deux modes S et π sont découplés, ainsi, en excitant le mode π à $L \rightarrow 0$, la perturbation se propage et arrive à $L \rightarrow \infty$, le mode S sera ainsi crée, dans ce

cas, les deux modes sont couplés l'un au l'autre, une partie de cette perturbation d'énergie est donc transférée au mode S , or comme nous l'avons déjà indiqué, le mode S est astreint à se propager vers les profondeurs infinies en suivant les lignes du champ magnétique, contrairement au mode π qui est piégé dans la cavité sub-photosphérique, par conséquent, les modes P sortant de la tache solaire voient leurs amplitudes réduite par rapport à celles qui entrent.

4.8-Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons étudié les ondes Magnéto-Atmosphériques dans une atmosphère polytrophe stratifiée, traversée par un champ magnétique uniforme et vertical, pour un nombre d'onde horizontal fixe et réel, nous avons obtenus une infinité de fréquences complexes sous la forme : $\omega_n - i\Gamma_n$, dans la limite non magnétique, nous avons $\Gamma_n \ll \omega_n$, les fréquences propres sont des fréquences réelles, et la courbe de dispersion varie comme $\omega \sim \sqrt{gk}$, cette relation de dispersion est celle d'une atmosphère polytrophe non magnétique.

Lorsque k augmente, Γ_n augmente aussi, les fréquences propres devient complexes, ceci est due à l'échappement du mode Slow le long des lignes du champ magnétique, en emportant avec lui l'énergie du mode π qui est piégé à l'intérieur de la cavité sub-photosphérique résonante, cette dernière est formée par la diminution rapide de la vitesse d'Alfven au sommet de l'atmosphère, et l'accroissement de la vitesse du son avec la profondeur au niveau inférieur de l'atmosphère.

Le facteur de qualité $Q_n = \omega_n / 2\pi\Gamma_n$ présente un minimum lorsque Γ_n est assez grand, dans ce cas on a une forte absorption, et un puissant couplage $\pi - S$. Parfois, Γ_n tend vers zéro et présente un minimum local pour des points bien isolés, ceci peut présenter un mode propre d'oscillation, et la valeur de Q_n dans ce cas est maximal.

Un champ magnétique puissant correspond à la limite $k > 1.66 \text{ Mm}^{-1}$, la relation de dispersion devient $\omega \sim k\sqrt{gL}$, dans ce cas, on trouve plusieurs modes propres dont la période d'oscillation varie de $T \approx 163$ à 178.6 secondes, ce qui correspond bien à la période de 3 minutes, oscillations propres observées dans l'ombre des taches solaires.

APPENDICE 1

Equations MAG et changement de variable

Nous avons les équations MAG :

$$\left(\omega^2 - k^2 (C_S^2 + C_A^2) + C_A^2 \frac{d^2}{dz^2} \right) U_x = -ik \left(-g + C_S^2 \frac{d}{dz} \right) U_z \quad (\text{A1.1})$$

$$\left(C_S^2 \frac{d^2}{dz^2} - \gamma g \frac{d}{dz} + \omega^2 \right) U_z = -ik \left(C_S^2 \frac{d}{dz} - (\gamma - 1)g \right) U_x \quad (\text{A1.2})$$

avec le changement de variable :

$$\zeta = -2kz \quad , \quad \chi = 2kL \quad , \quad \Omega^2 = \frac{m\omega^2}{2kg}$$

$$\text{avec} \quad C_S(z) = \left(\frac{g|z|}{m} \right)^{1/2} \quad , \quad C_A(z) = \left(\frac{gL}{m} \right)^{1/2} \left(\frac{L}{|z|} \right)^{m/2}$$

$$\text{et donc} \quad C_S^2 = \frac{g}{2km} \zeta \quad , \quad C_A^2 = \frac{g}{2km} \chi^{m+1} \zeta^{-m}$$

Nous avons :

$$U_z = -2k \frac{d\phi}{d\zeta} \quad , \quad U_x = ik \Psi$$

$$\frac{dU_z}{dz} = 4k^2 \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} \quad , \quad \frac{d^2U_z}{dz^2} = -8k^3 \frac{d^3\phi}{d\zeta^3}$$

$$\frac{dU_x}{dz} = -2ik^2 \frac{d\Psi}{d\zeta} \quad , \quad \frac{d^2U_x}{dz^2} = 4ik^3 \frac{d^2\Psi}{d\zeta^2}$$

en remplaçant dans l'équation (A1.2) :

$$\frac{d^3\phi}{d\zeta^3} + \frac{m+1}{\zeta} \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} + \frac{\Omega^2}{\zeta} \frac{d\phi}{d\zeta} = \frac{1}{4} \frac{d\Psi}{d\zeta} + \frac{\Psi}{4\zeta}$$

$$\frac{d^3\phi}{d\zeta^3} + \frac{m}{\zeta} \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} + \frac{\Omega^2}{\zeta} \frac{d\phi}{d\zeta} = \frac{1}{4} \frac{d\Psi}{d\zeta} + \frac{\Psi}{4\zeta}$$

$$\text{or nous avons} \quad \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} \right) = \zeta \frac{d^3\phi}{d\zeta^3} + \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} \quad \text{donc}$$

$$\frac{d^3\phi}{d\zeta^3} + \frac{1}{\zeta} \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} = \frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} \right)$$

en remplaçant cette dernière expression dans l'équation différentielle, on trouve :

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} \right) + m \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} + \Omega^2 \frac{d\phi}{d\zeta} = \frac{\zeta}{4} \frac{d\Psi}{d\zeta} + \frac{\Psi}{4}$$

ou encore

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} + m \frac{d\phi}{d\zeta} + \Omega^2 \phi \right) = \frac{1}{4} \left(\zeta \frac{d\Psi}{d\zeta} + \Psi \right)$$

or $\zeta \frac{d\Psi}{d\zeta} + \Psi = \frac{d}{d\zeta} (\zeta \Psi)$, donc

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} + m \frac{d\phi}{d\zeta} + \Omega^2 \phi \right) = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1}{4} \zeta \Psi \right)$$

d'où finalement :

$$\frac{d^2\phi}{d\zeta^2} + \frac{m}{\zeta} \frac{d\phi}{d\zeta} + \left(\frac{\Omega^2}{\zeta} - \frac{1}{4} \right) \phi = \frac{1}{4} \Psi$$

pour la première équation, en remplaçant toutes les dérivés :

$$\begin{aligned} & \frac{g}{2km} \zeta^{-m} \chi^{m+1} \left(4ik^3 \frac{d^2\Psi}{d\zeta^2} \right) + ik\omega^2 \Psi - k^2 \frac{g}{2km} \zeta (ik\Psi) - k^2 \frac{g}{2km} \chi^{m+1} \zeta^{-m} (ik\Psi) = \\ & - ik \left(\frac{g}{2km} \zeta 4k^2 \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} + g2k \frac{d\phi}{d\zeta} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{i2k^2 g}{m} \zeta^{-m} \chi^{m+1} \frac{d^2\Psi}{d\zeta^2} + ik\omega^2 \Psi - \frac{ik^2 g}{2m} \zeta \Psi - \frac{ik^2 g}{2m} \chi^{m+1} \zeta^{-m} \Psi = -2k^2 ig \frac{\zeta}{m} \left(\frac{d^2\phi}{d\zeta^2} + \frac{m}{\zeta} \frac{d\phi}{d\zeta} \right)$$

or nous avons démontré que :

$$\frac{d^2\phi}{d\zeta^2} + \frac{m}{\zeta} \frac{d\phi}{d\zeta} = \frac{1}{4} \Psi - \left(\frac{\Omega^2}{\zeta} - \frac{1}{4} \right) \phi$$

en remplaçant cette dernière dans l'équation précédente, on trouve :

$$\frac{ik^2 2g}{m} \zeta^{-m} \chi^{m+1} \frac{d^2\Psi}{d\zeta^2} + ik\omega^2 \Psi - \frac{ik^2 g}{2m} \zeta \Psi - \frac{ik^2 g}{2m} \chi^{m+1} \zeta^{-m} \Psi = \frac{-ik^2 g}{2m} \zeta \Psi + ik\omega^2 \phi$$

et en simplifiant par $\frac{2k^2 g}{m}$, on trouve :

$$\chi^{m+1} \left(\frac{d^2 \Psi}{d\zeta^2} - \frac{1}{4} \Psi \right) = \frac{m\omega^2}{2kg} \zeta^m (\phi - \Psi)$$

d'où finalement :

$$\chi^{m+1} \left(\frac{d^2 \Psi}{d\zeta^2} - \frac{1}{4} \Psi \right) = \Omega^2 \zeta^m (\phi - \Psi)$$

Les deux équations obtenues :

$$\frac{d^2 \phi}{d\zeta^2} + \frac{m}{\zeta} \frac{d\phi}{d\zeta} + \frac{\Omega^2}{\zeta} \phi = \frac{1}{4} \Psi$$

$$\chi^{m+1} \left(\frac{d^2 \Psi}{d\zeta^2} - \frac{1}{4} \Psi \right) = \Omega^2 \zeta^m (\phi - \Psi)$$

En explicitant $\Psi = \psi + \phi$ dans les deux équations, on trouve :

$$\frac{d^2 \phi}{d\zeta^2} + \frac{m}{\zeta} \frac{d\phi}{d\zeta} + \left(\frac{\Omega^2}{\zeta} - \frac{1}{4} \right) \phi = \frac{1}{4} \psi$$

$$\chi^{m+1} \frac{d^2 \psi}{d\zeta^2} + \Omega^2 \zeta^m \psi = \frac{-\chi^{m+1}}{4k^2} \alpha$$

avec la divergence de la vitesse $\alpha = \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \frac{-4k^2}{\zeta} \left(m \frac{d\phi}{d\zeta} + \Omega^2 \phi \right)$

APPENDICE 2

2.1-Le calcul des coefficients des séries ϕ et Ψ pour $\zeta = 0$

En chapitre 4, nous avons obtenus pour les solutions au point $\zeta = 0$ les résultats suivants:

$$\phi(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sigma^{n+\nu} \quad \text{avec} \quad c_0 = 1$$

$$\Psi(\sigma) = \sum_{n=4}^{\infty} b_n \sigma^{n+\nu}$$

avec $\nu = 0$, $\nu = 4$, $\nu = 6$

et les relations:

$$\begin{aligned} & (n+\nu)[(n+\nu-1)(n+\nu-2)(n+\nu-6) - 6(n+\nu) + 36]c_n + 4\Omega^2[8 + (n+\nu-2)(n+\nu-8)]c_{n-2} \\ & + 4\Omega^2\chi^{-5/2}(n+\nu-7)(n+\nu-6)c_{n-7} - (n+\nu-4)(n+\nu-3)c_{n-4} + 16\Omega^4\chi^{-5/2}c_{n-9} \\ & - 4\Omega^2c_{n-6} - 4\chi^{-5/2}\Omega^2c_{n-11} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A2.1})$$

$$b_{-4} = \nu(\nu+1) \quad (\text{A2.2})$$

$$b_{n-4} = c_n(n+\nu)(n+\nu+1) + 4\Omega^2c_{n-2} \quad (\text{A2.3})$$

Commençons d'abord à calculer les coefficients c_n et b_n pour $\nu = 0$

pour $\nu = 0$, l'équation (A2.1) devient :

$$\begin{aligned} & n[(n-1)(n-2)(n-6) - 6n + 36]c_n + 4\Omega^2[8 + (n-2)(n-8)]c_{n-2} \\ & + 4\Omega^2\chi^{-5/2}(n-7)(n-6)c_{n-7} - (n-4)(n-3)c_{n-4} + 16\Omega^4\chi^{-5/2}c_{n-9} \\ & - 4\Omega^2c_{n-6} - 4\chi^{-5/2}\Omega^2c_{n-11} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A2.4})$$

avec toujours $c_0 = 1$ et $c_n = 0$ pour $n < 0$

pour $n = 1$ l'équation (A2.4) nous donne $c_1 = 0$

$$n = 2 \Rightarrow c_2 = -\frac{2}{3}\Omega^2$$

$$n = 3 \Rightarrow c_3 = 0$$

pour $n = 4$, nous obtenons l'équation $0 \times c_4 = 0$, cette relation est toujours vérifiée quelque soit la valeur de c_4 , donc pour simplifier, on pose $c_4 = 0$

$$n = 5 \Rightarrow c_5 = 0$$

$n = 6 \Rightarrow$ la relation (A2.4) nous redonne la valeur de c_2 , donc $c_6 = ?$

$$n = 7 \Rightarrow c_7 = 0$$

$$n = 8 \Rightarrow c_8 = -\frac{\Omega^2}{18}c_6 - \frac{\Omega^4}{216}$$

utilisant maintenant les équations (A2.2) et (A2.3), ainsi que les valeurs de c_n obtenues pour déterminer les coefficients b_n

pour $\nu = 0$, les équations (A2.2) et (A2.3) deviennent :

$$b_{-4} = 0$$

$$b_{n-4} = c_n n(n+1) + 4\Omega^2 c_{n-2} \quad (\text{A2.5})$$

à partir de l'équation (A2.5) nous avons

$$n = 1 \Rightarrow b_{-3} = 0$$

$$n = 2 \Rightarrow b_{-2} = 0$$

$$n = 3 \Rightarrow b_{-1} = 0$$

$$n = 4 \Rightarrow b_0 = \frac{-8\Omega^4}{3}$$

$$n = 5 \Rightarrow b_1 = 0$$

$$n = 6 \Rightarrow b_2 = 42c_6$$

$$n = 7 \Rightarrow b_3 = 0$$

$$n = 8 \Rightarrow b_4 = 72 c_8 + 4\Omega^2 c_6$$

$$n = 9 \Rightarrow b_5 = 0$$

Pour $\nu = 0$, et à partir de l'expression $\Psi(\sigma) = \sum_{n=-4}^{\infty} b_n \sigma^{n+\nu}$, nous avons

$$\Psi_0 = \frac{-8\Omega^4}{3} + b_2\zeta + b_4\zeta^2 + b_6\zeta^3 + \dots$$

pour avoir les coefficients b_2 et b_4 , on applique la condition au limite $\frac{d\Psi_0}{d\zeta} = \frac{1}{2}\Psi_0$,

ce qui revient à écrire

$$b_2 + 2 b_4 \zeta + 3 b_6 \zeta^2 + \dots = \frac{-8\Omega^4}{6} + \frac{b_2}{2} \zeta + \frac{b_4}{2} \zeta^2 + \dots$$

en faisant l'égalité entre les coefficients des ζ qui ont la même puissance on trouve :

$$b_2 = \frac{-4\Omega^4}{3}$$

$$b_4 = -\frac{\Omega^4}{3}$$

$$b_6 = -\frac{\Omega^4}{18}$$

pour $n = 6$, nous avons trouvé que $b_2 = 42 c_6$ d'où $c_6 = \frac{b_2}{42}$

$$c_6 = -\frac{2\Omega^4}{63}$$

finalemant, on peut écrire les solutions ϕ et Ψ sous la forme:

$$\phi_0 = 1 - \frac{2\zeta\Omega^2}{3} - \frac{2\zeta^3\Omega^4}{63} + \dots$$

$$\Psi_0 = -\frac{\Omega^4}{3} \left(8 + 4\zeta + \zeta^2 + \frac{\zeta^3}{6} + \dots \right)$$

Pour $\nu = 4$ et $\nu = 6$, on utilise la même procédure pour déterminer les coefficients des séries ϕ et Ψ .

2.2-Le calcul des coefficients des séries U_S, V_S et U_π, V_π associés aux solutions ϕ_S, Ψ_S et ϕ_π, Ψ_π respectivement pour $\zeta \rightarrow \infty$

2.2.1-Le mode π

$$U_\pi = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \zeta^{-n/2}, \quad V_\pi = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \zeta^{-n/2}$$

Les relations de récurrence pour les coefficients u_n et v_n sont

$$v_n = u_n + 2(n-2)u_{n-2} + ((n-3)(n-4) + (a+1)(a-2n+8))u_{n-4} \quad (\text{A2.6})$$

$$u_n = -\left(\frac{(n-1)(n-2) + (a+1)(a-2n+4)}{2n}\right)u_{n-2} - \left(\frac{(n-5)(n-4) + a(a-2) - (2a-1)(n-5)}{2nb}\right)v_{n-5} - \frac{(n-3-a)}{nb}v_{n-3} \quad (\text{A2.7})$$

$$\text{avec } u_0 = v_0 = 1 \quad \text{et} \quad a = 2\Omega^2 - \frac{3}{2} \quad b = 4\chi^{-5/2}\Omega^2$$

pour $n=1$, et à partir de l'équation (A2.6), nous avons $v_1 = u_1$

l'équation (A2.7) nous donne $u_1 = 0$

$$\Rightarrow v_1 = u_1 = 0$$

pour $n=2$, l'équation (A2.6) $\Rightarrow v_2 = u_2$

$$\text{l'équation (A2.7)} \Rightarrow u_2 = -\frac{a(a+1)}{4}$$

$$\Rightarrow v_2 = u_2 = -\frac{a(a+1)}{4}$$

pour $n=3$, l'équation (A2.6) $\Rightarrow v_3 = u_3$

$$\text{l'équation (A2.7)} \Rightarrow u_3 = \frac{a}{3b}$$

$$\Rightarrow v_3 = u_3 = \frac{a}{3b}$$

pour $n=4$, l'équation (A2.6) $\Rightarrow v_4 = u_4 + 4u_2 + a(a+1)u_0 = u_4$

$$\begin{aligned} \text{l'équation (A2.7)} \Rightarrow u_4 &= \frac{a(a+1)(6+(a+1)(a-4))}{32} \\ \Rightarrow v_4 = u_4 &= \frac{a(a+1)(6+(a+1)(a-4))}{32} \end{aligned}$$

2.2.2-Le mode S

$$U_S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \zeta^{-n/4}, \quad V_S = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \zeta^{-n/4}$$

Les relations de récurrence pour les coefficients u_n et v_n sont :

$$u_n = v_n + 2ai(n-1)v_{n-1} - \left(\frac{(n-1)(n-8) + (33/4)}{4} \right) v_{n-8} \quad (\text{A2.8})$$

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{-i}{2an} \left(\frac{n(n-7) + 33/4}{4} \right) v_{n-7} \\ &\quad - \frac{8ia(n-3)u_{n-6} - 16\Omega^2 u_{n-9} - (n(n-13) + 165/4)u_{n-13}}{16a^2} \end{aligned} \quad (\text{A2.9})$$

$$\text{avec } a = \chi^{-5/4} \Omega$$

pour $n=1$, et à partir de l'équation (A2.8), nous avons $u_1 = v_1$

l'équation (A2.9) nous donne $v_1 = 0$

$$\Rightarrow u_1 = v_1 = 0$$

même chose pour $n=2$, $n=3$, $n=4$, $n=5$, nous obtenons :

$$u_2 = v_2 = 0$$

$$u_3 = v_3 = 0$$

$$u_4 = v_4 = 0$$

$$u_5 = v_5 = 0$$

pour $n=6$, et à partir de l'équation (A2.8), nous avons $u_6 = v_6$

$$\text{l'équation (A2.9) nous donne } v_6 = -\frac{1}{8a^2}$$

$$\Rightarrow u_6 = v_6 = -\frac{1}{8a^2}$$

pour $n = 7$, et à partir de l'équation (A2.8), nous avons $u_7 = v_7 + 12ia v_6$

$$\Rightarrow u_7 = v_7 - \frac{3i}{2a}$$

de l'équation (A2.9) on a

$$v_7 = -\frac{33i}{224a}$$

$$\Rightarrow u_7 = -\frac{369i}{224a}$$

pour $n = 8$, et à partir de l'équation (A2.8), nous avons $u_8 = v_8$

l'équation (A2.9) nous donne $v_8 = 0$

$$\Rightarrow u_8 = v_8 = 0$$

pour $n = 9$, l'équation (A2.8) nous donne $u_9 = v_9$

à partir de l'équation (A2.9) on a $v_9 = -\frac{i\Omega^2}{18a^3}$

$$\Rightarrow u_9 = v_9 = -\frac{i\Omega^2}{18a^3}$$

pour $n = 10$, et à partir de l'équation (A2.8) on a $u_{10} = v_{10} + \frac{\Omega^2}{a^2}$

l'équation (A2.9) nous donne $v_{10} = 0 \Rightarrow u_{10} = \frac{\Omega^2}{a^2}$

pour $n = 11$, on a $u_{11} = v_{11} = 0$

pour $n = 12$, l'équation (A2.8) nous donne $u_{12} = v_{12}$

l'équation (A2.9) nous donne $v_{12} = \frac{1}{128a^4}$ d'où finalement $u_{12} = v_{12} = \frac{1}{128a^4}$

APENDICE 3

Résolution Numérique du Système d'Equations Différentielles par la Méthode RK44 d'ordre 4

D'abord on réduit le système d'équations différentielles (4.5) et (4.6) à une seule équation pour Ψ et ϕ , nous obtenons ainsi :

$$b = 4 \Omega^2 \chi^{-5/2}$$

$$\begin{aligned} \Psi^{(4)} = & \frac{9}{\zeta^{1/2}} \Psi^{(3)} + \left(-\frac{30}{\zeta} - 4\Omega^2 + \zeta - b\zeta^{5/2}\right) \Psi'' + \left(\frac{30}{\zeta^{3/2}} - \frac{4\Omega^2}{\zeta^{1/2}} - 4\zeta^{1/2} - 2b\zeta^2\right) \Psi' \\ & + (6 + 4\Omega^2\zeta - 4\Omega^2 b\zeta^{5/2} + b\zeta^{7/2}) \Psi \end{aligned} \quad (\text{A3.1})$$

$$\begin{aligned} \phi^{(4)} = & \frac{3}{\zeta^{1/2}} \phi^{(3)} + \left(-4\Omega^2 + \frac{6}{\zeta} - b\zeta^{5/2} + \zeta^{3/2}\right) \phi'' + \left(-\frac{30}{\zeta^{3/2}} + \frac{20\Omega^2}{\zeta^{1/2}} - 2b\zeta^2 + 2\zeta^{1/2}\right) \phi' \\ & + \left(-\frac{32\Omega^2}{\zeta} - 4\Omega^2 b\zeta^{5/2} + 4\Omega^2\zeta - b\zeta^{7/2}\right) \phi \end{aligned} \quad (\text{A3.2})$$

Généralement, on intègre ce type d'équation par la méthode suivante :

chaque équation est sous la forme :

$$y^{(4)} = p(t) y^{(3)} + q(t) y'' + r(t) y' + s(t) y \quad (\text{A3.3})$$

On pose le changement de variable suivant :

$$u_1 = y \quad ; \quad u'_1 = y' = u_2 \quad ; \quad u'_2 = y'' = u_3 \quad ; \quad u'_3 = y^{(3)} = u_4 \quad ; \quad u'_4 = y^{(4)} = u_5$$

et donc on peut écrire l'équation (A3.3) comme :

$$u'_1 = u_2 = f_1$$

$$u'_2 = u_3 = f_2$$

$$u'_3 = u_4 = f_3$$

$$u'_4 = u_5 = f_4 = p(t)u_4 + q(t)u_3 + r(t)u_2 + s(t)u_1$$

pour $a \leq t \leq b$, on a les conditions aux limites :

$$u_1(a) = y(a) = w_{10}$$

$$u_2(a) = y'(a) = w_{20}$$

$$u_3(a) = y''(a) = w_{30}$$

$$u_4(a) = y^{(3)}(a) = w_{40}$$

soit h le pas de l'intégration, N le nombre de point, donc on peut écrire :

$$h = \frac{b-a}{N} \quad \text{et} \quad t_j = a + j h$$

m étant l'ordre des équations, dans notre cas $m = 4$, les solutions $w_{m,j}$ correspondent à :

$$w_{1,j+1} \rightarrow y, \quad w_{2,j+1} \rightarrow y', \quad w_{3,j+1} \rightarrow y'', \quad w_{4,j+1} \rightarrow y^{(3)} :$$

$$w_{1,j+1} = w_{1,j} + \frac{1}{6} (k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41})$$

$$w_{2,j+1} = w_{2,j} + \frac{1}{6} (k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42})$$

$$w_{3,j+1} = w_{3,j} + \frac{1}{6} (k_{13} + 2k_{23} + 2k_{33} + k_{43})$$

$$w_{4,j+1} = w_{4,j} + \frac{1}{6} (k_{14} + 2k_{24} + 2k_{34} + k_{44})$$

avec $i = 1 \rightarrow 4$:

$$k_{1,i} = h f_i \left(t(j), w_{1,j}, w_{2,j}, w_{3,j}, w_{4,j} \right)$$

$$k_{2,i} = h f_i \left(t(j) + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{k_{1,1}}{2}, \dots, w_{m,j} + \frac{k_{1,m}}{2} \right)$$

$$k_{3,i} = h f_i \left(t(j) + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{k_{2,1}}{2}, \dots, w_{m,j} + \frac{k_{2,m}}{2} \right)$$

$$k_{4,i} = h f_i \left(t(j) + h, w_{1,j} + k_{3,1}, \dots, w_{m,j} + k_{3,m} \right)$$

Dans notre cas, nous avons les conditions aux limites suivantes :

Pour $\zeta \rightarrow 0$:

$$\phi(\zeta) = A\phi_A + B\phi_B$$

$$\Psi(\zeta) = A\Psi_A + B\Psi_B$$

$$\phi'(\zeta) = A\phi'_A + B\phi'_B$$

$$\Psi'(\zeta) = A\Psi'_A + B\Psi'_B$$

$$\phi''(\zeta) = A\phi''_A + B\phi''_B$$

$$\Psi''(\zeta) = A\Psi''_A + B\Psi''_B$$

$$\phi^{(3)}(\zeta) = A\phi_A^{(3)} + B\phi_B^{(3)}$$

$$\Psi^{(3)}(\zeta) = A\Psi_A^{(3)} + B\Psi_B^{(3)}$$

A et B étant des constantes arbitraire.

APPENDICE 4

Sommation et convergence des Séries

L'approximation asymptotique optimale :

Les séries U_S , V_S , U_π , V_π sont toutes des séries asymptotiques à 1, mais elles ne sont pas convergentes, donc il faut les tronquées dans le bon ordre, une méthode bien adaptée à cela est connue sous le nom de l'approximation asymptotique optimale .

On observe chaque terme individuel dans la série asymptotique, les termes deviennent de plus en plus petits au fur et à mesure, mais éventuellement vu que la série diverge, à partir d'un certain ordre elle devient de plus en plus large et tend vers l'infini. Pour chaque valeur de ζ (ζ_m ou autre ζ), on localise le terme le plus petit en valeur absolue, puis on additionne tous les termes précédents de la série sans inclure le terme le plus petit, cette somme finie des termes donne une bonne estimation de la fonction, avec une erreur qui est égale approximativement à la valeur absolue du terme qu'on a enlevé.

Bibliographie :

- Abdelatif, T.E.1990, *Solar.Phys.*, 129, 201
- Abdelatif, T.E.1987, *Astrophys. J.*, 322, 494
- Abdelatif, T.E., Lites, B.W., & Thomas, J.H .1986, *Astrophys. J.*, 311, 1015
- Abdelatif, T.E .1985, Thèse de PHD, Université de Rochester
- Abramowitz, M., & Stegan,I.A .1964, Handbook of Mathematical Functions, (New York)
- Barnes,G., & Cally, P.S. 2000, *Solar.Phys.*, 193, 373
- Beckers, J.M., & Shultz, R.B. 1972, *Solar.Phys.*, 27, 61
- Bender, C. M., & Orzag, S.A. 1978, Advanced Mathematical Methods for Scientists and
Enginneers (New York: McGraw-Hill)
- Bhatnagar, A., Livingston, W.C., & Harvey, J.W. 1972, *Solar.Phys.*, 27, 80
- Bhatnagar, A., & Tanaka, K .1972, *Solar.Phys.*, 24, 87
- Biront, D., Goossens, A., & Mestel, L.1982, *Mo.Not.R.astr.Soc.*, 201, 619
- Bogdan, T.J. . 2000, *Solar.Phys.*, 192, 373
- Bogdan, T.J., Hindman, W.B., Cally, P.S., & Charbonneau, P.1996, *Astrophys. J.*, 465,
406
- Bogdan, T.J., & Cally, P.S.1995, *Astrophys. J.*, 453, 928
- Bogdan, T.J., Brown, T.M., Lites, B. W., & Thomas, J.H. 1993, *Astrophys. J.*, 406, 723
- Braun, D.C.1995, *Astrophys. J.*, 451, 859
- Braun, D.C., Duvall,T.L.,Jr., & LaBonte,B.J.1990, *Astrophys. J.*, 354, 372
- Braun, D.C., Duvall,T.L.,Jr., & LaBonte,B.J.1988, *Astrophys. J.*, 335, L113
- Braun, D.C., Duvall,T.L.,Jr., & LaBonte,B.J.1987, *Astrophys. J.*, 319, L27
- Braun, D.C., & Lindsey, C. 2000, *Solar.Phys.*, 192, 285
- Burden, L.R., Faires,D.J., & Reynolds, A.C .1981, Numerical Analysis, (Boston,
Massachusetts, Prindle, Weber et Schmidt)
- Cally, P.S. 2004, *ESA SP – 547*
- Cally, P.S., Crouch, A.D., & Braun, D.C. 2003, *MNRAS*, 346, 381
- Cally, P.S. 2001, INTAS workshop on MHD waves, Palma de Mallorca
- Cally, P.S. 2001, *Astrophys. J.*, 548, 473
- Cally, P.S., & Bogdan, T.J.1997, *Astrophys. J.*, 486, L67
- Cally, P.S., & Madisson, S.T. 1997, *J. Plasmas Phys.*, 57, 591
- Cally, P.S., Bogdan, T.J., & Zweibel, E.G. 1994, *Astrophys. J.*, 437, 505
- Cally, P.S., & Bogdan, T.J. 1993, *Astrophys. J.*, 402, 732

- Cally, P.S. 1991, *J. Comp. Phys.*, 93, 411
- Cally, P.S. 1983, *Solar.Phys.*, 88, 77
- Crouch, A.D., & Cally, P.S. 2004, *ESA SP – 547*
- Ferraro, V.C.A., & Plumpton, C. 1958, *Astrophys. J.*, 127, 459
- Giovanelli, R.G. 1972, *Solar.Phys.*, 27, 71
- Gurman, J.B., & Leibacher, J.W. 1984, *Astrophys. J.*, 283, 859
- Hasan, S.S.1991, *Astrophys. J.*, 366, 328
- Hindman, W.B., Zweibel, E.G., & Cally, P.S. 1999, *Astrophys. J.*, 510, 494
- Hollweg, J. V. 1988, *Astronomy & Astrophys .*, 20, 910
- Kosovitchev, A.G., Duvall, T.L., & Sherrer, P. 2000, *Solar.Phys.*, 159, 176
- Lamb, H. 1945, *Hydrodynamics*, New York: Dover
- Lighthill, J. 1978, *Waves in Fluids* (Cambridge: Cambridge Univ. Press)
- Lighthill, M. J. 1960, *SPTA.*, 252, 397
- Lindsey, C., & Braun, D.C.1999, *Astrophys. J.*, 459, 760
- Lites, B. W., Bogdan, T.J., Brown, T.M., Thomas, J.H., & Cally, P.S. 1998, *Astrophys. J.*, 497, 464
- Lites, B.W.1986, *Astrophys. J.*, 301, 992
- Lites, B. W., & Thomas, J.H. 1985, *Astrophys. J.*, 294, 682
- Lou, Y.Q. 1988, *Geophys..Astrophys, Fluid dyn .*, 42, 277
- Maltby, P., Avrett, E.H., Carlsson, M., Kjeldseth-Moe, O., Kurucz, R.L., & Loeser, R. 1986, *Astrophys. J.*, 306, 284
- Murdin, P.2001, *Encyclopaedia of Astronomy and Astrophysics (IPP)*
- Nye, A.H., & Thomas, J.H.1974, *Solar.Phys.*, 38, 399
- Pizo, V.J.1986, *Astrophys. J.*, 302, 785
- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., & Vetterling, W.T. 1986-1992, *Numerical Recipes* (Cambridge)
- Roberts, P.H., & Soward, A.M. 1983, *MNRAS*, 205, 1171
- Roberts, P.H., & Boardman, A.D. 1962, *Astrophys. J.*, 135, 552
- Rosenthal, C.S. 1995, *Astrophys. J.*, 438, 434
- Rosenthal, C.S. 1990, *Solar.Phys.*, 130, 313
- Rosenthal, C.S. 1992, *Solar.Phys.*, 139, 25
- Sakurai, T, Goossens, M., & Hollweg, J. V. 1991, *Solar.Phys.*, 133, 247
- Scheuer, M.A., & Thomas, J.H. 1981, *Solar.Phys.*, 71, 21
- Spruit, H.C., & Bogdan, T.J. 1992, *Astrophys. J.*, 391, L109

- Spruit, H.C.1991, Challenges to Theories of the Structure of Moderate Mass Stars,
J.Toomre & D.O.Gough (Berlin: Springer),121
- Thomas, J.H., & Weiss N.O.1991, Sunspots: Theory and observation (Dordrecht: Kluwer),
375
- Thorne, K.S .1969, *Astrophys. J.*, 158, 1
- Thorne, K.S., & Campolattaro. A . 1967, *Astrophys. J.*, 149, 591
- Uchida, Y., & Sakurai, T.1975, *PASJ*, 27, 579
- Wood, W.P.1990, *Solar.Phys.*, 128, 353
- Yu, C.P.1965, *Phys.Fluids*, 8, 650
- Zhang, H.1997, *Astrophys. J.*, 479, 1012
- Zhugzhda,Y.D., Locans, V., & Staude, J. 1983, *Solar.Phys.*, 5, 451
- Zhugzhda,Y.D., Locans, V., & Staude, J. 1984, *Solar.Phys.*, 5, 451