N° d'ordre : 08/2008 – M/PH

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITES DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE (U.S.T.H.B)

FACULTE DE PHYSIQUE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : PHYSIQUE.

Spécialité : Energétique et Mécanique des Fluides.

Par

SAHRAOUI Djahida Farida

Sujet

INSTABILITE DE KELVIN-HELMHOLTZ APPLIQUEE A LA PHOTOSPHERE SOLAIRE : Étude MHD

Soutenu le 16 janvier 2008, devant le Jury composé de :

M. BOUHADEF	Professeur (USTHB)	Président
M. ABDELATIF	Directeur de Recherche (CRAAG)	Directeur de Thèse
M. BOUABDELLAH	Professeur (USTHB)	Co-Directeur de Thèse
M. HANCHI	Professeur (EMP)	Examinateur
M. SI AHMED	Professeur (USTHB)	Examinateur
M. DEBIANE	Maitre de Conférences (USTHB)	Examinateur

Résumé

La structure magnétique de l'atmosphère solaire est caractérisée par de forts gradients de sorte que toute théorie faisant la prédiction de l'évolution des ondes et des mouvements de l'atmosphère solaire doit y prêter la plus grande attention.

Dans ce contexte, on étudie la propagation et la stabilité des ondes sur une surface de discontinuité plane afin d'examiner le rôle des instabilités hydromagnétiques de surface dans le transfert de l'énergie mécanique à travers la structure inhomogène de la photosphère notamment dans la couronne dont le caractère inhomogène est considérable. Ainsi, le modèle que l'on propose se base sur l'approximation d'une interface plane unique. Cette dernière qui modélise le bord de la tache solaire permet d'étudier les variations du milieu et d'analyser la zone de discontinuité hydromagnétique séparant la tache solaire de son milieu photosphérique.

Plus particulièrement, on s'intéresse à l'effet d'une nappe de courant sur la stabilité de la structure localisée autour de la discontinuité relative au bord de la tache solaire, à savoir, la nappe de vorticité sous l'effet d'un champ magnétique parallèle.

On établit, dans ces conditions, la relation de dispersion et les propriétés des ondes hydromagnétiques de surface en l'absence de l'effet du champ gravitationnel tout en précisant les conditions nécessaires de stabilité.

Enfin, à la lumière de ces résultats encourageants, on montre que l'approche linéaire du phénomène d'instabilité considéré suggère un nouveau regard sur ces problèmes importants tels que les mouvements qui sont à l'origine du chauffage de la couronne solaire.

Mots-clés : Instabilité, magnetohydrodynamique (MHD), photosphère solaire, tache solaire, discontinuité, relation de dispersion.

A mes très chers Parents.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude à mes Directeurs de thèse, Dr. ABDELATIF et Dr. BOUABDELLAH, pour m'avoir accueilli en leurs équipes et pour leurs encouragements tout au long des travaux, j'ai beaucoup appris en travaillant sous leur Direction.

Je suis très reconnaissante envers MM. les Professeurs DEBIANE, HANCHI et SI AHMED d'avoir accepté d'être membres du Jury et envers M. BOUHADEF de l'avoir présidé.

Je remercie les enseignants du Département de Physique de l'USTHB qui m'ont initié à la mécanique des fluides.

Ce travail a aussi bénéficié des échanges avec mes collègues du CRAAG particulièrement : Mlle SAHNOUNE, M. MECHERI et M. SEGHOUANI. Je leur sais sincèrement gré pour leur aimable aide et soutien à différentes phases de mon travail.

Table des matières

Résumé I
Remerciements V
Table des matières VII
Table des figures XI
Introduction Générale 1
Première Partie : Physique Solaire et Position Theorique du Probleme 3
Chapitre 1. Elements de physique Solaire 5
1.1 Introduction 5
1.2 L'étoile Soleil 5
1.3 La structure interne du Soleil 8
1.3.1 Le cœur du Soleil 8
1.3.2 La zone radiative 9
1.3.3 La tachocline 9
1.3.4 La zone convective 10
1.4 L'atmosphère solaire 11
1.4.1 La photosphère 11
1.4.2 La chromosphère 12
1.4.3 Zone de transition 13
1.4.4 La couronne 14
1.5 L'activité magnétique du Soleil 15
1.5.1 Manifestations de l'activité magnétique 16
1.5.2 Les taches solaires 19
1.6 Structure magnétique du bord d'une tache solaire et instabilité de Kelvin-Helmholtz 21
1.7 Conclusion 24
Chapitre 2. Formulation générale de la MHD solaire 26
2.1 Introduction 26
2.2 Approche théorique de la MHD 27
2.2.1 Grandeurs caractéristiques de la MHD en astrophysique 29

2.3 Équations de la MHD 29
2.3.1 Equation d'induction 29
2.3.2 Équations de l'hydrodynamique 34
2.3.3 Force de Laplace 35
2.4 MHD idéale 36
2.5 Résumé des équations 37
2.5.1 Conditions de validité 38
2.6 Paramètres sans dimensions 38
2.7 Conclusion 40
Deuxième Partie : Approche Analytique du Probleme et Resultats 41
Chapitre 3. Approche du phénoméne d'instabilité de type Kelvin-Helmholtz 43
3.1 Introduction 43
3.2 Théorie des ondes MHD parfaites dans les milieux présentant une structure magnétique 44
3.3 MHD linéaire dans un plasma homogène 47
3.3.1 Une formulation linéarisée de la MHD 47
3.3.2 Modes MHD en milieu homogène 49
3.3.3 Modes d'Alfvén 51
3.3.4 Modes magnétosonores 53
3.4 MHD linéaire dans un plasma non homogène 55
3.4.1 Ondes sur une surface de discontinuité magnétique 56
3.4.2 Ondes MHD de surface sur une discontinuité plane 66
3.5 La problématique de la modélisation de l'instabilité Kelvin-Helmholtz en MHD 68
3.5.1 Formulation des équations de l'instabilité K-H 69
3.5.1.1 Conditions aux limites 72
3.5.2 Analyse de la stabilité 72
3.5.2.1 Méthode des modes normaux 73
3.5.2.2 Perturbations compressibles 73
Chapitre 4. Analyse des résultats 81
4.1 Introduction 81
4.2 Interpretation 81
4.3 Conclusion 99
Conclusion Générale 101

Annexe A. L'étude des instabilités linéaires 103
A.1. Définition de la stabilité 103
A.2. Linéarisation des équations 104
A.3. les ondes dans une atmosphère en mouvement en équilibre, et brusquement structurée. 105
A.3.1. Influence d'un équilibre en mouvement sur la linéarisation des équations de la MHD 105
A.3.2. Calcul de l'équation de dispersion 116
Bibliographie 128

Table des figures

Figure 1 – Rotation différentielle du Soleil 6
Figure 2 – Evolution des étoiles dans le diagramme de Hertzsprung-Russel (H-R).....7
Figure 3 – Schéma simplifié des principales zones solaires 7
Figure 4 – Schéma détaillé de la structure interne, et de l'atmosphére solaire.....8
Figure 5 – Schématisation du processus de convection. 10
Figure 6 – La surface du Soleil présentant un aspect granuleux et des taches sombres correspondant à des régions actives. 11
Figure 7 – Détails de la couche convective, de la photosphère et de l'atmosphère solaire. 12
Figure 8 – Structure schématique du Soleil.....13
Figure 9 – Un des premiers modèles de dynamo solaire (H. W. Babcock 1960).....16
Figure 10 – Emergence d'un tube de flux sous l'effet de la poussée d'Archimède liée au champ magnétique. 17
Figure 11 – Tube de flux magnétique. 18
Figure 12 – Tache solaire (KIS/NSO).....20
Figure 13 – Diagramme « papillon » illustrant la variation de latitude de formation des taches en fonction de l'activité solaire de 1870 à nos jours. 20
Figure 14 – Schématisation de la magnétopause.....21
Figure 15 – Plan géométrique de l'instabilité Kelvin-Helmholtz. 22
Figure 16 – Géométrie d'une seule nappe vortex-courant. 23
Figure 17 – Schéma montrant la couche de courant. 44
Figure 18 – Forme de l'amplitude du mode de surface. 45
Figure 19 – Ondes de surface et de volume sur une seule interface et dans un slab ou un cylindre.....46
Figure 20 – Propagation d'une onde d'Alfvén.....52

Figure 21 – Célérité des ondes magnétosonores se propageant avec un angle θ_0 relativement à $\vec{B}_0$ 54
Figure 22 – Schéma qualitatif des plans d'ondes. 62
Figure 23 – Schéma qualitatif d'une seule discontinuité. 62
Figure 24 – Schéma qualitatif de deux discontinuités dos à dos. 63
Figure 25 – Shématisation de l'état de base du plasma. 66
Figure 26 – Diagramme de Stabilité d'une seule nappe de Vorticité-Courant avec (a) : R=1/12 et (b) : R=1/2 (réf. [21]). 75
Figure 27 – Diagramme de stabilité d'une seule nappe de vorticité-courant pour (R=1/12). 82
Figure 28 – Diagramme de stabilité d'une seule nappe de vorticité-courant pour (R=1/2). 83
Figure 29 – Courbe de stabilité marginale pour (R=0.50) 84
Figure 30 – Courbe de stabilité marginale pour (R=0.0833) 85
Figure 31 – Evolution de la courbe de stabilité marginale pour (R=0.50 et R=0.0833). 86
Figure 32 – Courbe de stabilité marginale pour (R=0.40). 87
Figure 33 – Courbe de stabilité marginale pour (R=0.30). 88
Figure 34 – Courbe de stabilité marginale pour (R=0.20). 89
Figure 35 – Courbe de stabilité marginale pour (R=0.10). 90
Figure 36 – Evolution comparée de la courbe de stabilité marginale pour R décroissant. 91
Figure 37 – Courbe de stabilité marginale pour (R=0.57). 93
Figure 38 – Courbe de stabilité marginale pour (R=0.68). 94
Figure 39 – Courbe de stabilité marginale pour (R=0.79). 95
Figure 40 – Courbe de stabilité marginale pour (R=0.90). 96
Figure 41 – Courbe de stabilité marginale pour (R=1.0). 97
Figure 42 – Evolution de la courbe de stabilité marginale en fonction de R. 98
Figure 43 – Analogie mécanique des mécanismes d'instabilité. 103

Introduction Générale

La structure magnétique de l'atmosphère solaire qui apparaît relativement discontinue est caractérisée par de forts gradients de vitesse, de température, de champ magnétique, etc., de sorte que toute théorie faisant la prédiction de l'évolution des ondes et mouvement de l'atmosphère solaire doit se faire avec la grande attention. On se propose de réaliser une étude détaillée de la propagation et la stabilité des ondes sur une surface de discontinuité plane de l'atmosphère solaire.

Cependant, on rencontre des problèmes importants concernant le rôle de la largeur finie des discontinuités, qui influe sur la stabilité des différentes configurations magnétiques des structures atmosphériques du Soleil. Par exemple, les variations du milieu peuvent se traduire soit par une seule discontinuité plane, soit par un certain nombre de discontinuités, non éloignée les unes des autres telle que deux discontinuités dos à dos (Slab).

Dans notre travail, on se limite à l'approximation d'une interface plane unique. Cette dernière ayant pour but de modéliser le bord de la tache solaire, permet d'étudier les variations du milieu et d'analyser l'instabilité de la discontinuité hydromagnétique qui sépare la tache solaire de son milieu photosphérique. L'étude de ce type de perturbation peut se modéliser en s'appuyant sur l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (K-H) dans les conditions de l'activité solaire.

Dès lors, on se base sur l'approximation d'une interface plane unique, séparant deux fluides parfaitement conducteurs et compressibles dont les champs de vitesses et les champs magnétiques sont parallèles et uniformes de part et d'autre.

Plus particulièrement, on s'intéresse à l'effet d'une nappe de courant sur la stabilité de la structure localisée autour de la discontinuité relative au bord de la tache solaire, à savoir, la nappe de vorticité sous l'effet d'un champ magnétique parallèle.

Dans le cadre d'une théorie linéaire, on utilise la méthode de décomposition en modes propres adaptée à l'étude de la stabilité de ces écoulements magnétohydrodynamique (MHD) pour décrire le problème d'instabilité envisagé au voisinage de l'état d'équilibre de la structure photosphérique.

C'est dans ce contexte que l'on établit la relation de dispersion et les propriétés des ondes hydromagnétiques de surface sans l'effet du champ gravitationnel tout en précisant les conditions nécessaires de stabilité.

Notre étude est synthétisée et présentée dans le présent document. Cette étude se décompose en deux parties.

La première partie présente la physique solaire et positionne théoriquement le problème sous forme de deux chapitres.

Le premier chapitre constitue une introduction assez générale à cette étoile qu'est le Soleil. Toutes les formes de l'activité solaires étant, très probablement, les conséquences de l'interaction des champs magnétiques avec la rotation différentielle et la convection sont décrites et la problématique de l'instabilité K-H liée à la structure du bord de la tache solaire est présentée à la fin de ce chapitre.

Le second chapitre décrit la physique du plasma solaire par la MHD. Les équations de base de cette dernière y sont présentées et leur domaine d'application est discuté dans le cadre du Soleil.

La deuxième partie, composée du chapitre trois et quatre, présente l'approche analytique du problème et les résultats de notre étude.

Le chapitre trois est consacré à la théorie des ondes MHD parfaites dans les milieux présentant une structure magnétique dans le cadre d'une théorie linéaire. La nature de la propagation des ondes dans un milieu homogène et illimité en présence d'un champ magnétique uniforme a été rappelée où les caractéristiques de ces ondes sont changées lorsque la propagation est dans un milieu non homogène et latéralement limité.

Plus particulièrement, on s'est intéressé au comportement des modes dans un milieu où la non-uniformité prend la forme d'une seule interface plane, générant ainsi les ondes de Surface. Ces ondes sont d'un intérêt intrinsèque et très important en vue de leur rôle possible dans le chauffage de la couronne.

Pour finir, l'approche du phénomène d'instabilité de type K-H dans la structure magnétique du bord d'une tache solaire est traitée. Dans ce cadre, il est développé du point de vue théorique et quantitatif par résolution numérique, la modélisation de la discontinuité hydromagnétique de Kelvin-Helmholtz au bord de la tache solaire, sous la forme d'une prescription pour son fort gradient de vitesse et de champ magnétique.

Le chapitre quatre constitue une conclusion numérique et théorique du travail présenté dans cette thése. Les principaux résultats issus des travaux numériques, concrétisés par un développement d'un code de calcul, sont établis et analysés.

Ces travaux numériques, ont permis d'extraire des résultats originaux quant aux seuils de stabilité et aux influences des deux forces, en l'occurrence, l'intensité de courant et l'énergie magnétique, sur la stabilité de la structure magnétique : le bord de la tache solaire.

Première Partie :

Physique Solaire et Position Theorique du Probleme

Chapitre 1. Elements de physique Solaire

1.1 Introduction

Il y'a 4.6 milliards d'années, dans la morne et lointaine banlieu d'une Galaxie banale, un nuage interstellaire quelconque allait donner naissance à une étoile, parmi tant d'autres, laquelle allait s'entourer de planètes et sur l'une de ces planètes, la Terre où allait émerger la vie et la conscience. Lorsque cette conscience s'éleva au point de différencier la vie et la mort, l'étoile nommée Soleil devint source de mythe, puis de science.

1.2 L'étoile Soleil

Le Soleil, crucial pour la destinée humaine, n'est qu'une étoile moyenne, de la majorité silencieuse parmi les centaines de milliards (10^{11}) qui peuplent la Voie Lactée, notre Galaxie (Tableau 1). Étant donné sa proximité par rapport à la Terre, elle a été et reste un objet d'études intensives, tant du point de vue de l'observation que de la théorie.

Carte d'identité du Soleil	
Distance de la Terre	150 millions de km
Distance du centre galactique	30 000 années-lumière
Type spectral	G2 V
Age	4,6 milliards d'années
Rayon	700000 km
Température de surface	5800 degres
Masse	$2 \cdot 10^{30}$kg
Luminosité	4.10[illegible]erg/s
Génération d'énergie moyenne	2 erg/g par seconde
Densité moyenne	1,4 g/cm[illegible]
Température centrale	15 millions de degres
Densité centrale	150 g/cm[illegible]

Tableau 1 – Principales caractéristiques du Soleil

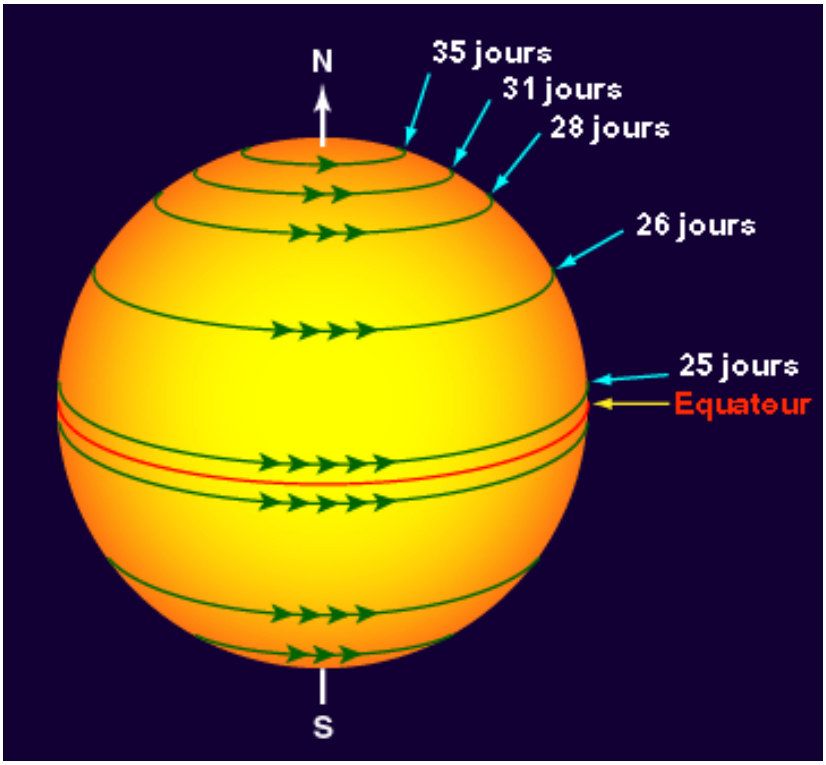

Figure 1 – Rotation différentielle du Soleil

Actuellement, elle constitue un véritable laboratoire pour les domaines d'études les plus variés de la physique, en général, et de l'astrophysique, en particulier.

Ce corps sphérique de gaz chaud et ionisé est un réacteur nucléaire à confinement gravitationnel qui donne lieu à un phénomène appelé rotation différentielle. La période de rotation différentielle est de 26 jours à l'équateur, 31 jours à 60° de latitude et de 35 jours aux pôles (Figure 1). Composé essentiellement de plus de 70% d'hydrogène et plus de 25% d'Hélium. Ces derniers sont moins abondants sur la Terre plutôt constituée de matériaux lourds (Carbone, Azote, Oxygène, Fer, Soufre, etc.) et qui entrent pour 2% seulement dans la composition du Soleil.

C'est une étoile classique de type spectral G2V et d'une magnitude absolue de 4.8, sur la séquence principale qui barre le diagramme température/luminosité où se concentrent les étoiles qui, comme le Soleil, brulent l'hydrogène pour en faire de l'hélium (Figure 2).

Boule massive de plasma à l'extérieur du système, le Soleil est donc avant tout une centrale nucléaire durable, autocontrôlée et stabilisée par la gravitation, qui, en transformant de l'hydrogène en hélium nous fournit, lumière, chaleur et énergie.

Etant donné le plus gros objet du système solaire, le Soleil se divise en deux parties distinctes, la région opaque, dont l'étude est limitée par l'observation et la zone transparente à la lumière visible. La photosphère appelée sphère de lumière visible, marque la frontière entre Soleil opaque et Soleil transparent (Figure 3).

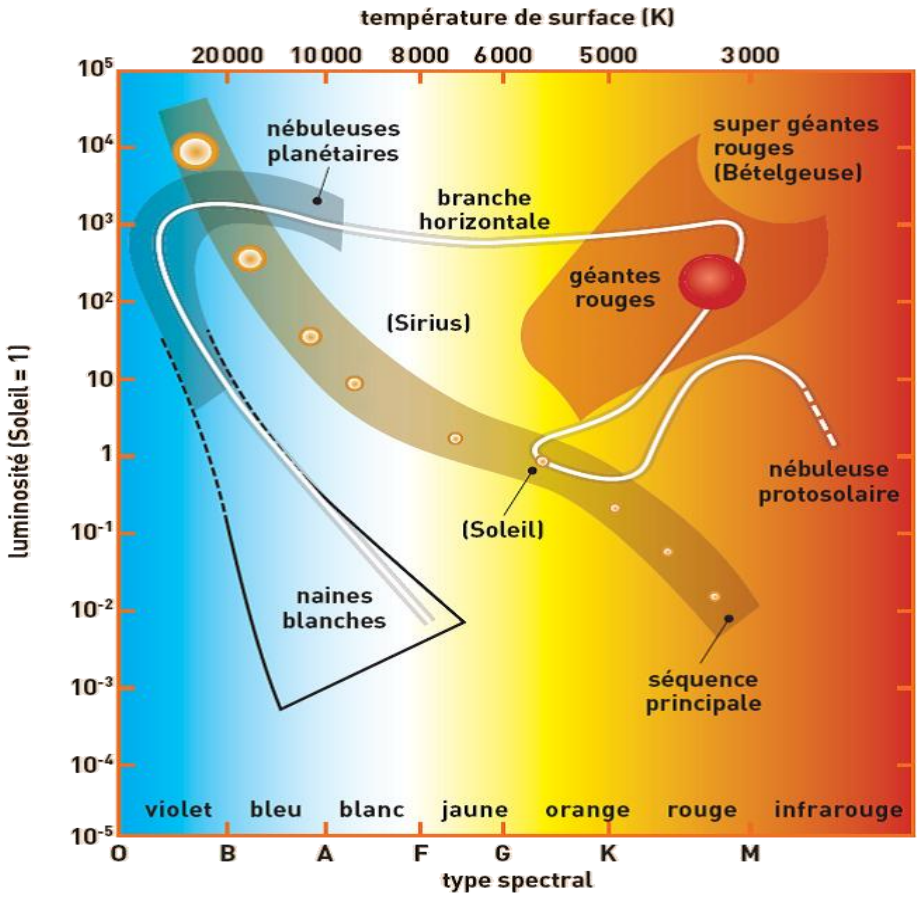

Figure 2 – Evolution des étoiles dans le diagramme de Hertzsprung-Russel (H-R)

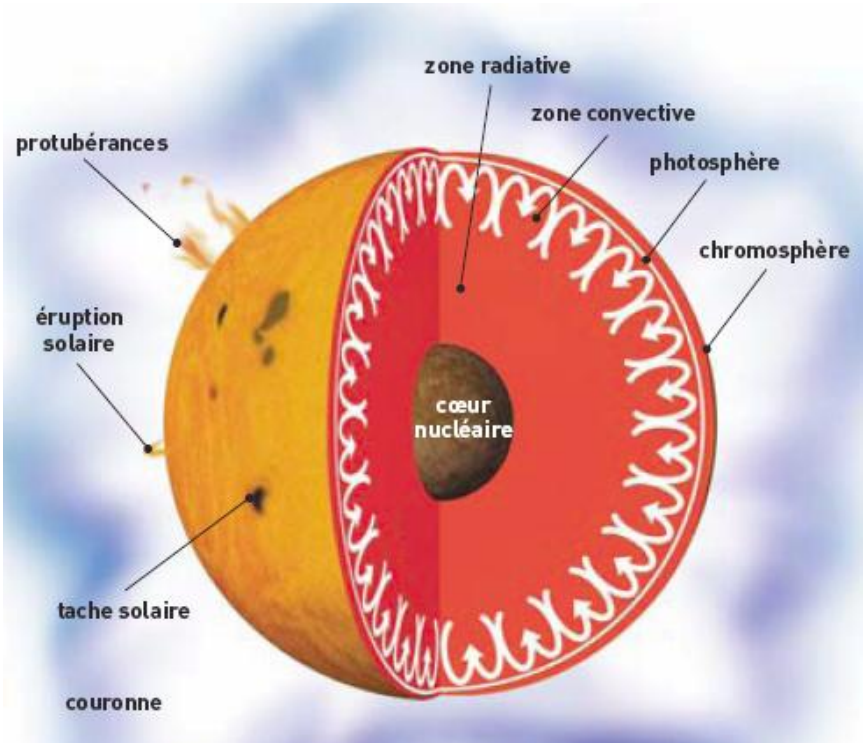

Figure 3 – Schéma simplifié des principales zones solaires

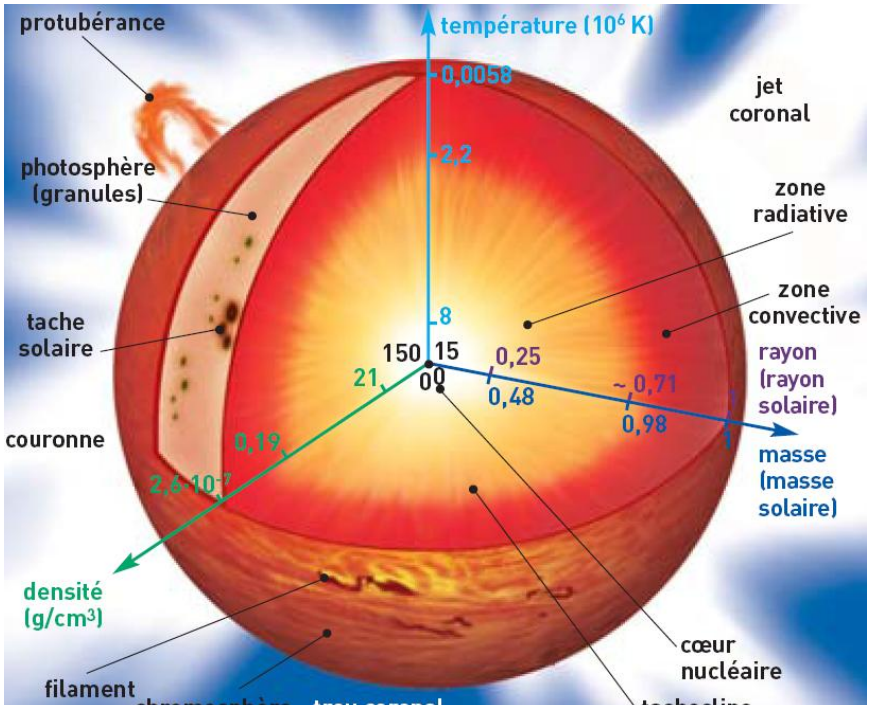

Figure 4 – Schéma détaillé de la structure interne, et de l'atmosphère solaire.

1.3 La structure interne du Soleil

L'intérieur du Soleil est divisé en quatre zones dans lesquelles les processus physiques sont très différents : le noyau ou cœur du Soleil, la zone radiative, la tachocline et la zone convective (Figure 4). Cette structure interne du Soleil, que l'œil ne pénètre pas à cause de l'opacité de sa matière, laisse difficilement filtrer la lumière. Elle ne peut donc être abordée que par la combinaison de modèles hydrodynamiques et des observations héliosismologiques.

1.3.1 Le cœur du Soleil

Dans le cœur du Soleil, le jeu des forces d'attractions gravitationnelles implique de fortes pressions qui s'accompagnent par de hautes températures de l'ordre de 15×10^6 °K et une densité de l'ordre de 150 g/cm^3, déclenchant des réactions de fusion nucléaire. Une fusion nucléaire continue, convertit l'hydrogène en hélium et produit de l'énergie sous forme de photons (rayonnement gamma) et de neutrinos électroniques (ν_e).

Les neutrinos électroniques extrêmement difficiles à détecter, s'échappent de l'étoile et traversent toutes les couches du Soleil, de même que la Terre, sans être perturbés. Les rayons (γ) émergeant vers l'extérieur, repoussent les couches de gaz qui, sous l'effet de l'attraction gravitationnelle, tendent à s'effondrer vers le cœur du Soleil.

La région centrale qu'est le noyau contient 48% de la masse solaire et s'étend sur 25% du rayon (Figure 4). Elle constitue la zone de production de l'énergie nécessaire au maintien de l'étoile en équilibre.

1.3.2 La zone radiative

La zone radiative allant jusqu'à 71% en rayon, en incluant le cœur, contient 98 % de la masse Solaire et transporte l'énergie produite au centre par le mode de transfert radiatif. Elle est constituée de gaz hautement ionisés. Les photons diffusés, absorbés par les électrons libres et les ions, chauffent cette région opaque, pour être émis de nouveau, avec une énergie différente dans une direction quelconque, par chocs successifs aléatoires puis finir par émerger sous forme de photons infrarouges et lumière visible à la surface. De ce fait, la traversée d'un photon dans la zone radiative dure en moyenne plus d'un million d'années, au lieu de seulement deux secondes si cette région était optiquement mince.

Cette zone dite « radiative », la plus proche du cœur, s'arrête lorsque la température devient suffisament basse pour assurer la recombinaison de l'hydrogène et pour que les atomes gardent leurs électrons. La température passe alors de 8×10^6 °K à 2.2×10^6 °K et la densité peut varier de 21 g cm^3 à 0.19 g cm^3 (Figure 4). L'ensemble, constitué du noyau et de la zone radiative, est en rotation rigide autour de l'axe Nord-Sud.

1.3.3 La tachocline

Une dynamique complexe existe entre les zones radiative et convective, où la discontinuité de la rotation différentielle interne (rotation rigide de la zone radiative et la rotation relative de la zone convective) induit un fort cisaillement à l'interface de ces deux régions.

Cette interface appelée tachocline, estimée à 3000 km d'épaisseur, joue le rôle fondamental de la dynamo Solaire. Le phénoméne est induit par les différences de vitesses entre les couches de gaz électrifiées qui la cernent. Elle génère le champ magnétique à grande échelle, d'orientation polloïdale (dans l'axe de rotation du Soleil) par transformation d'énergie mécanique de rotation en énergie magnétique. La rotation différentielle avec la latitude a pour effet d'amplifier le champ magnétique et de l'orienter de façon toroïdale (parallèlement à l'équateur solaire).

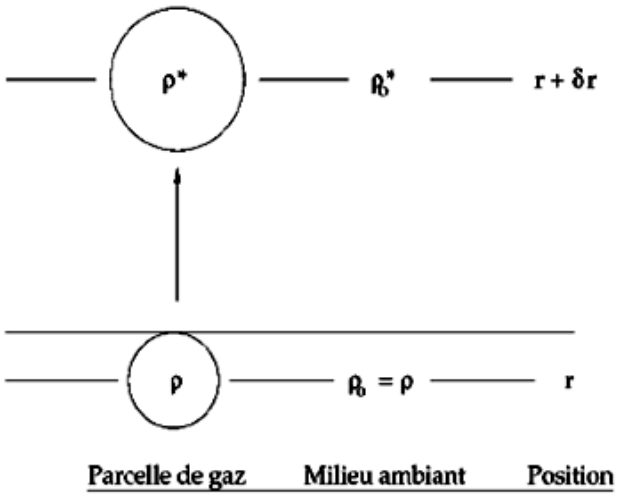

Figure 5 – Schématisation du processus de convection.

1.3.4 La zone convective

Dans la zone bouillonnante plus externe, dite convective, les atomes gardent une partie de leurs électrons en raison de la chute de la température. De nombreux processus atomiques sont, ici, à l'œuvre et le niveau élevé de l'opacité rend difficile la progression des photons. De plus, la densité y varie d'un facteur un million, entre la base et la surface. Ces forts gradients de températures et de densité engendrent des mouvements convectifs de sorte que l'énergie ne s'évacue pas de façon uniforme. Des bulles de gaz chaudes, ne pouvant se refroidir par rayonnement à cause de l'opacité, se dilatent, et deviennent moins denses que le milieu environnant en subissant une force de type poussée d'Archimède (Figure 5).

Ce mouvement ascendant des bulles transportant avec elle son énergie, en libère une partie au niveau de la surface visible, car le plasma y est optiquement mince. Ce qui permet l'échappement de l'énergie sous forme de photons vers le milieu interplanétaire avant d'être refroidies pour descendre vers le fond de la zone convective. Où, elles se réchauffent à nouveau, remontent et recommencent le processus.

La retombée de la parcelle de gaz convective se fait non pas au cœur des bulles qui montent mais à leurs périphéries. La circulation des bulles s'organise en cellules de convection qui apparaissent sur un cliché comme des granules ou des supergranules brillantes (Figure 6), dont les dimensions sont respectivement de l'ordre de 1000 km et 35000 km.

1.4 L'atmosphère solaire

L'atmosphére solaire situé à la périphérie, est observable directement. Elle regroupe la photosphère, zone à partir de laquelle la lumière nous parvient, constituant ainsi, la frontière virtuelle entre l'intérieur du Soleil et son environnement. La chromosphère, région de transition puis la couronne. Ces trois dernières parties ne sont visibles que lors d'éclipses totales du Soleil (Figure 4).

1.4.1 La photosphère

La photosphère, en continuité avec l'intérieur solaire, est une région dont la température décroit vers l'extérieur. Cette surface épaisse de seulement de 400 km et dont la température décroit de 6500 °K à l'intérieur jusqu'à 5800 °K à la surface, contribue pour 99% au rayonnement total du Soleil.

Dans cette région, on observe un phénomène spectaculaire constitué de réseau cellulaire thermo-convectif, à savoir, la granulation de dimension moyenne égale à 1000 km, ainsi que des cellules beaucoup plus étendues dites de supergranulation. La taille caractéristique de ces derniéres est de l'ordre de 30000 km, y compris leur profondeur (Figure 6).

Ces structures dont le centre est plus brillant que les pourtours, reflètent le mouvement ascendant de la matière chaude qui bouillonne dans la zone convective. Les pourtours des cellules, plus sombres, correspondent au mouvement desendant lié à la matière refroidie (Figure 7). Ces structures analogues au phénoméne de Rayleigh-Bénard ont une durée de vie de quelques minutes.

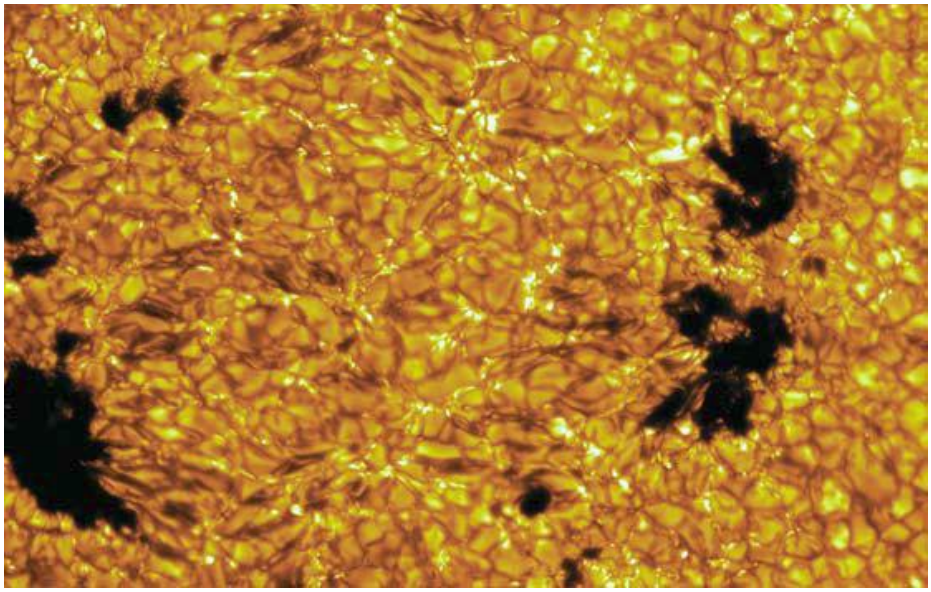

Figure 6 – La surface du Soleil présentant un aspect granuleux et des taches sombres correspondant à des régions actives.

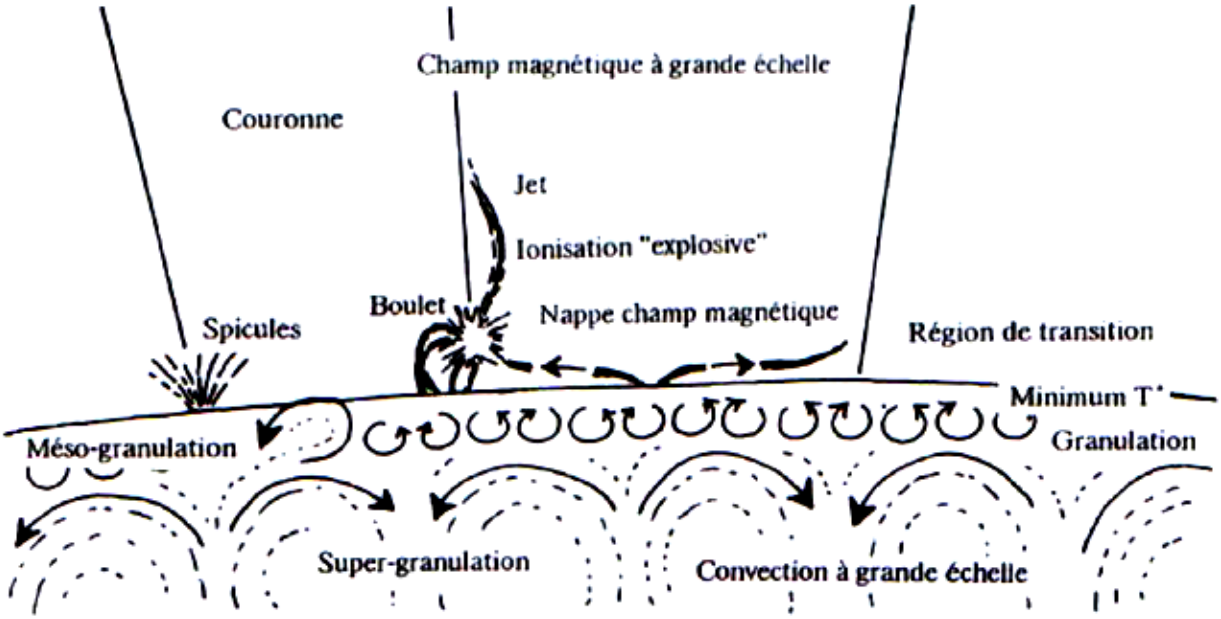

Figure 7 – Détails de la couche convective, de la photosphère et de l'atmosphère solaire.

Les cellules de supergranulation sont d'une grande importance pour l'atmosphère solaire. Elles structurent le champ magnétique du Soleil calme, qu'elles concentrent à leur périphérie. Les champs entrainés depuis la base de la zone de convection vers la photosphère apparaissent au centre des cellules de convection et sont repoussés vers le bord par les mouvements convectifs. L'effet de ces cellules de supergranulation se répercute à des altitudes supérieures de l'atmosphère solaire, contrairement aux granules qui restent principalement un phénomène photosphérique.

En plus de cet aspect granuleux que présente la photosphère, les concentrations de champs magnétiques forment des structures (plus au moins circulaires, à diverses échelles) très complexes telle que, pores, facules et taches solaires (Figure 8).

1.4.2 La chromosphère

Au-delà de la photosphère, qui s'étend sur des millions de kilomètres, se trouve la chromosphère, dont la densité continue à décroitre rapidement, alors que la température, sous l'effet d'un chauffage supplémentaire, passe du millier de degrés pour atteindre 10000 °K vers l'extérieur.

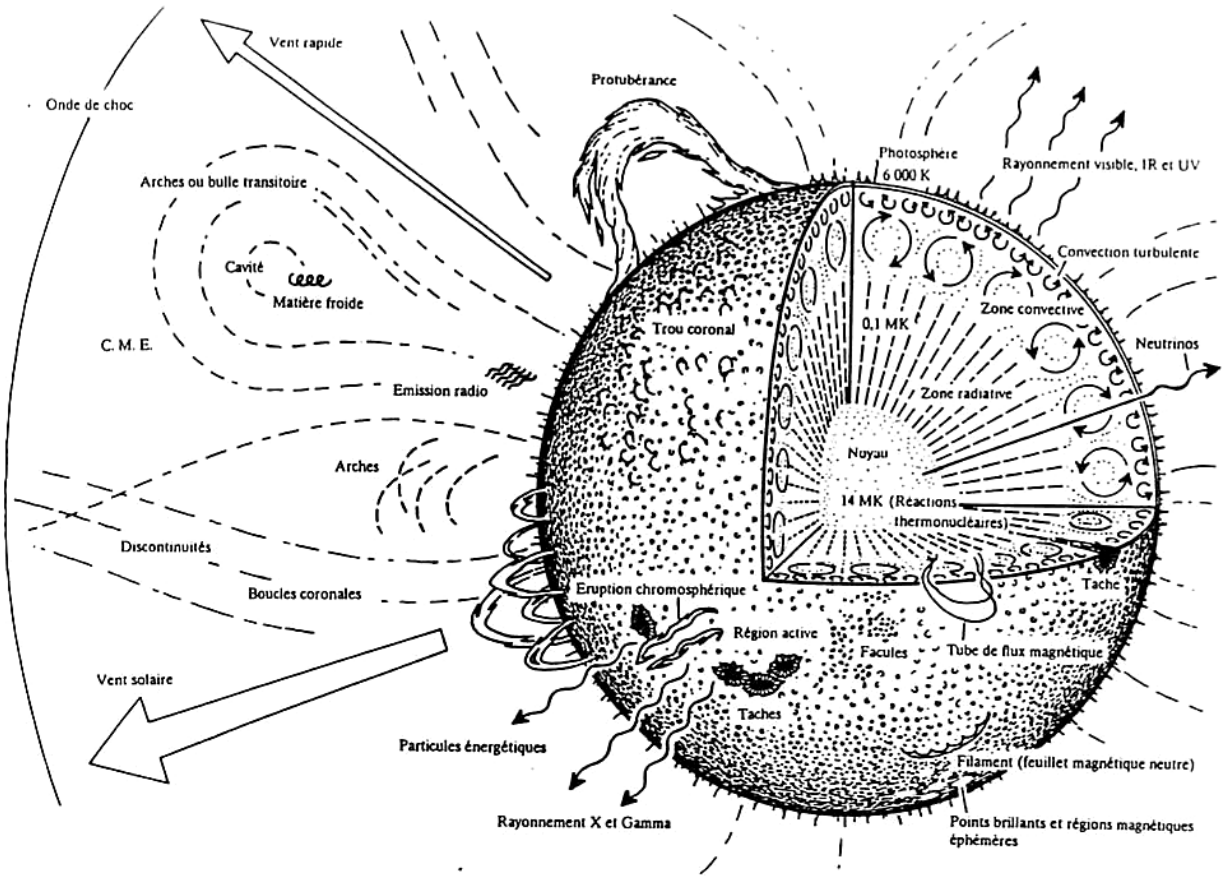

Figure 8 – Structure schématique du Soleil.

C'est une couche très hétérogène d'une épaisseur moyenne de 2000 à 3000 km, composée de structures diverses, telles que les plages, régions brillantes caractérisant les forts champs magnétiques des taches solaires. Les protubérances ou filaments, lorsqu'elles sont vues sur le disque solaire, sont des structures magnétiques plus denses et plus froides de l'ordre de 10000 °K que leur environnement. De plus, les spicules, petits jets de matière à vie courte de 5 à 10 minutes, se dirigeant vers la couronne à une vitesse de prés de 20 km/s (Figure 8).

Elle est visible pendant de courts instants lors des éclipses totales et contribue très peu au rayonnement solaire.

1.4.3 Zone de transition

Entre la chromosphère et la couronne, se situe la région de transition, couche mince et irrégulière dans laquelle la température augmente brutalement, de 10000 °K à la limite supérieure de la chromosphère jusqu'à un million de degrés (10^6 °K) vers l'extérieur. Cette montée rapide en température est attribuée au mécanisme de chauffage, liés aux champs magnétiques forts des régions actives.

1.4.4 La couronne

La couronne, peu riche en gaz, est la couche la plus externe de l'atmosphère du Soleil. C'est un plasma dont la température est de l'ordre de 1.5 10^6 °K et une densité faible. Elle s'étend jusqu'à des distances égales à plusieurs rayons solaires et se fond dans le milieu interplanétaire.

Dans cette couche élevée de l'atmosphère solaire, peu dense, et au-delà, les particules chargées (ions et électrons) sont sensibles aux forces électromagnétiques. Ces forces peuvent être plus importantes que la gravité et maintenir, en altitude, de la matière, voire l'éjecter de la couronne à travers l'espace interplanétaire. La couronne peut alors présenter des aspects très divers traduisant l'activité magnétique du Soleil caractérisés par des protubérances, éruptions solaires ou trous coronaux (Figure 8).

Dans cette région, en perpétuelle évolution, apparaissent les protubérances ou filaments, sous la forme de grands panaches de gaz chauds, provenant de la chromosphère. Ces gaz sortent de la surface sous forme de colonnes qui s'éloignent dans l'espace ou reviennent vers la surface du Soleil formant ainsi des boucles (Figure 8).

Un champ magnétique intense soulève la matière dense et bloque ses mouvements, la conduisant à son refroidissement.

Des éjections hors de l'atmosphère solaire, de matières coronales ou des éruptions violentes ont lieu dans les régions actives, lorsque les champs magnétiques sont suffisamment forts pour vaincre l'attraction gravitationnelle (Figure 8). Des milliards de tonnes de matière sont ainsi transportées. Elles se caractérisent par la brusque libération d'une énorme quantité d'énergie sous forme de rayonnements visibles, UV, X et radio.

L'activité solaire n'étant pas constante, une intensité cyclique réguliére, des trous coronaux se produisent dans les régions actives où le champ magnétique permet l'échappement de matière. Dans ces zones moins brillantes et plus froides, les lignes de champ magnétique ne reviennent pas vers le Soleil mais s'ouvrent radialement par rapport au Soleil (Figure 8).

Le Soleil expulse également un flux permanent de particules chargées, principalement, des protons et des électrons formant un plasma, appelé vent solaire (Figure 8). Celui-ci se propage hors du système solaire à une vitesse d'environ 450 km/s.

La couronne est observée lors des éclipses totales du Soleil ou par des coronographes. Ce sont des dispositifs qui permettenet d'occulter la lumière du disque de la photosphère.

1.5 L'activité magnétique du Soleil

Les photographies à haute résolution du Soleil montrent une variété de phénomènes d'activités, incluant des structures de champs de vitesses (Granulation, Supergranulation) et des structures de champs magnétiques. Ces dernières représentent des combinaisons de plasma et de champs magnétiques en constant état de changements structuraux.

Il existe deux sortes de structures magnétiques : les petites structures (pores, points brillants, points magnétiques) et les grandes structures (taches essentiellement, régions actives telles, que les facules, les filaments, les éruptions, les arches coronales, etc.).

Toute l'activité magnétique du Soleil est une conséquence de l'existence d'un champ magnétique sur le Soleil. Dans la photosphère, et d'ailleurs à l'intérieur où il prend naissance, le champ magnétique est concentré dans des tubes de flux avec des intensités de l'ordre de 1 à 3 kG. Ces différentes manifestations de surface des tubes de flux provenant de l'intérieur, sont celles de champs forts. Il existe cependant des régions de champs magnétiques faibles (c'est-à-dire inférieurs à 0.1 T) qui peuvent être éventuellement des zones de champs turbulents entre les tubes de flux.

Ce réseau magnétique, identifié comme des tubes de flux de plusieurs centaines de Gauss, en prenant tour à tour la forme de ces différents phénomènes magnétiques (taches solaires, protubérances, points brillants, etc.), provient de l'effet dynamo. Ce processus est la propriété qu'à un fluide conducteur en mouvement, de pouvoir générer, par induction un champ magnétique. S'il n'est pas entretenu, le champ magnétique diffuse et décroit. Seuls certains écoulements ont la capacité d'amplifier et d'entretenir le champ magnétique. Ce qui est le cas des mouvements turbulents présents dans le Soleil.

En effet, la convection turbulente associée à la forte rotation différentielle, en profondeur et en latitude, dispose de propriétés d'étirement, de cisaillement et d'enroulement nécessaires au développement de cet effet dynamo, qui est à l'origine du magnétisme observé.

Afin de comprendre la diversité des formes que revêt le magnétisme solaire, il est nécessaire de distinguer les phénomènes réguliers de ceux qui ne le sont pas. La théorie actuelle suppose que la source du champ magnétique est probablement une dynamo à grande échelle, qui est organisée dans la tachocline, à la base de la zone convective, coexistant avec la dynamo à petite échelle, responsable de l'activité irrégulière et du réseau magnétique désordonné : éruptions, points brillants. Ces derniers sont le résultat de la turbulence présente dans l'enveloppe convective. La

dynamo à grande échelle, quand à elle, permet d'expliquer la formation des taches solaires.

1.5.1 Manifestations de l'activité magnétique

La répartition du champ magnétique, en surface, est dans une large proportion déterminée par les mouvements convectifs du plasma dans les cellules de supergranulation. Ces mouvements concentrent les lignes de force aux bords des cellules, là où les courants de gaz froid et descendantont ont tendance à se rejoindre.

Une autre cause liée à l'origine de cette structure est l'effondrement convectif qui transforme de faibles concentrations en de tubes étroits et de forte concentration, car à l'équilibre de pression initiale, le matériau convectif qui se trouve dans les lignes de champ magnétique d'un élément, présente des pertes radiatives et, par conséquent, se refroidit. Au fur et à mesure qu'il se refroidit, sa densité augmente, entrainant sa descente ce qui laisse place à un déficit en pression ayant pour effet de concentrer les lignes de champs. Un nouvel équilibre est atteint lorsque la pression magnétique devient suffisamment grande et à ce moment, la convection dans la région magnétique est bloquée.

Par ailleurs, des mouvements convectifs plus profonds, combinés aux mouvements de cisaillement dus à la rotation différentielle, concentrent certaines lignes de champs en tubes qui émergent vers la surface. Ces lignes de force du champ magnétique sont généralement parallèles à l'équateur et forment une nappe sous la zone convective. Initialement orientées du Nord au Sud, la rotation différentielle a pour effet d'enrouler en spirale les lignes de champ magnétique. Le champ est alors amplifié par l'étirement qu'il subit selon l'équateur (Figure 9).

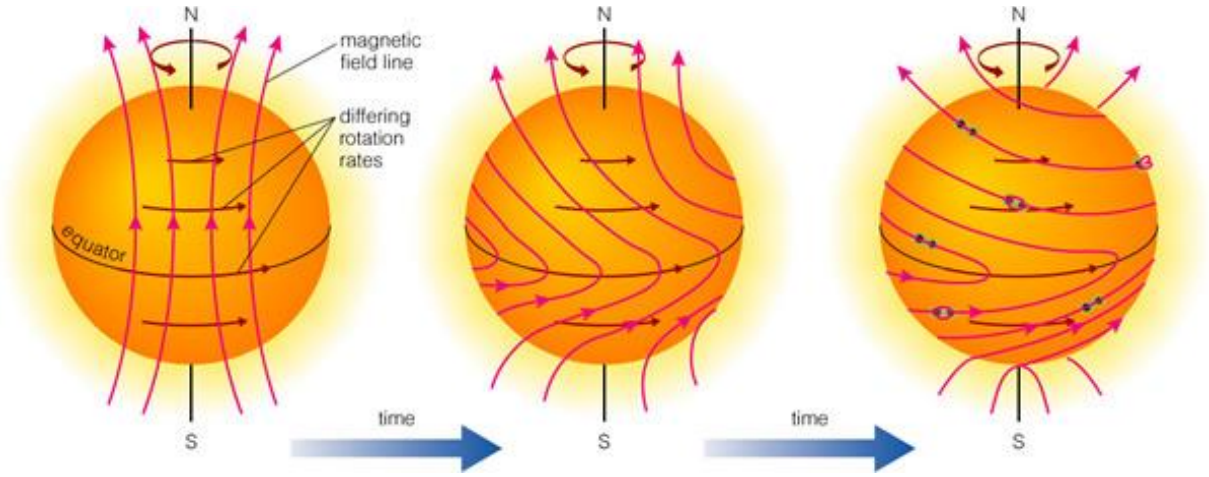

Figure 9 – Un des premiers modèles de dynamo solaire (H. W. Babcock 1960).

Si localement le champ est trop fort pour que le tube puisse être maintenu par la pression dynamique, due à la convection pénétrante, il doit s'élever.

En effet, un tube de flux magnétique ne peut rester immergé : dans un tube cylindrique, en équilibre de pression avec son environnement libre de champ magnétique, on a l'égalité

$$p_e = p_i + \frac{B^2}{\left(2\mu_0\right)} \tag{1.1}$$

où $B^2/\left(2\mu_0\right)$ est la pression due au champ magnétique.

La pression du gaz à l'intérieur du tube, et donc sa densité sont plus faibles qu'à l'extérieur du tube, car la pression interne, somme de la pression du gaz et la forte pression magnétique, doit rester égale à la pression externe. La faible densité du tube, due à la présence du champ magnétique, entraine l'existence d'une poussée d'Archimède P, qui le déforme, malgré la résistance due à la tension T des lignes de force du champ magnétique. La poussée d'Archimède agit et le tube s'élève.

Ainsi, un tube de flux magnétique traverse la zone convective et à l'endroit où il perce la surface, une boucle se forme, maintenue par des pieds ancrés sous la zone convective, en créant une paire de taches noires visibles à l'intersection ; entre la boucle et la surface solaire, si le champ magnétique est assez fort pour inhiber la convection, ou des petites structures brillantes, si le champ magnétique est assez faible afin d'être transporté par le plasma dans son mouvement(Figure 10).

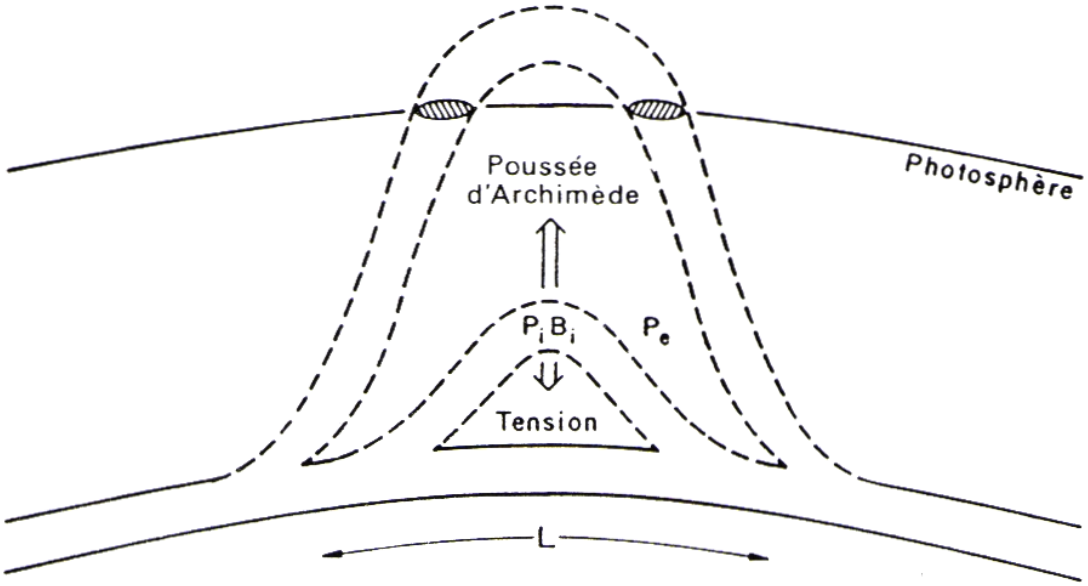

Figure 10 – Emergence d'un tube de flux sous l'effet de la poussée d'Archimède liée au champ magnétique.

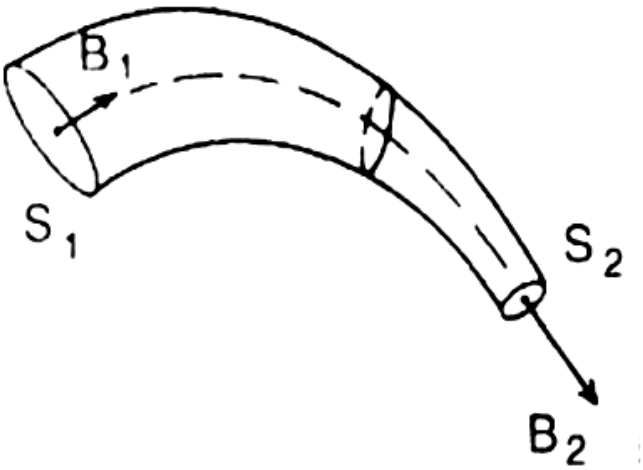

Figure 11 – Tube de flux magnétique.

Le maintien des tubes en profondeur durant leur phase de formation peut être expliqué par l'impact des mouvements descendants du fluide sur les couches situées immédiatement sous la zone convective.

Toutes les régions actives sont formées de tubes de champ magnétique remplis de matière de basse pression. Ces tubes de flux délimités par les lignes de champ magnétique ont plusieurs propriétés qui permettent de les considérer comme des entités indépendantes (Figure 11).

Le flux magnétique est conservé à l'intérieur du tube. Si le milieu est suffisamment ionisé, les particules ne traversent pas les lignes du champ : le plasma contenu dans le flux y reste, voire la masse du tube entier, ne change pas au cours du temps, alors que la forme du tube même, peut changer de façon considérable.

La conductivité thermique est considérable à l'intérieur du tube (plasma infiniment conducteur $\sigma = \infty$). L'ensemble des particules de plasma situées sur une même ligne de force à l'instant $t = 0$, est également sur une même ligne de force à $t \neq 0$ (les électrons suivent les lignes de champ), mais la conductivité est faible perpendiculairement au champ : du point de vue thermique, le tube est isolé.

Le plasma étant suffisamment ionisé, champ magnétique et plasma sont alors solidaires. Dés lorsle champ magnétique est gelé dans le plasma. Ces deux théorèmes fondamentaux ; le théorème de la conservation du flux et celui du gel sont nécessaires pour comprendre l'évolution du champ magnétique en MHD parfaite du plasma solaire.

Le comportement du champ et du plasma dépend alors du facteur beta $\left(\beta = p/p_B\right)$ rapport entre la pression du plasma à l'intérieur du tube, $p = n\ k_B T$ et la pression magnétique, $p_B = B^2/2\mu$, où B est le champ magnétique interne et μ est la perméabilité magnétique.

Le champ magnétique de la surface solaire ne se produit pas dans la forme diffuse et homogène mais principalement, dans des tubes de flux isolés, lesquels varient avec la dimension et l'intensité du champ. Exemple d'une tache de 3 kG facilement visible, à un tube de flux intense subtelescopique de 1 à 2 kG, dans le réseau de supergranules.

Au dessus da la surface solaire, les boucles magnétiques remplissent la couronne calme et active en dehors des trous coronaux. La photosphère est structurée par les tubes de flux et la couronne, par les boucles magnétiques.

La nature dissemblable de la structuration magnétique dans ces deux régions dépend du paramètre beta (β) du plasma qui est de l'ordre de l'unité $(\beta = 1)$ ou plus grand $(\beta > 1)$ dans la photosphère, alors que celui de la couronne est petit $(\beta < 1)$. Si β est petit devant l'unité, le champ magnétique impose sa structure au plasma (le plasma est confiné) et les forces gazeuses sont donc négligeables. C'est le cas des boucles de champ magnétique de la chromosphère et de la couronne.

À l'inverse, si β est grand devant l'unité, les forces gazeuses dominent et le champ magnétique est transporté par le plasma dans son mouvement. Les pieds des boucles magnétiques dans la photosphère, où le champ magnétique coronal tend à etre emporté par la pression radiale selon un vent solaire constitue un exemple typique.

Lorsqu'on ne peut en aucun cas négliger les forces gazeuses et magnétiques pour β de l'ordre unité, le traitement du milieu est particulièrement complexe, comme l'est le cas du vent solaire proche de l'orbite de la Terre et de la surface visible de la photosphère.

Par conséquent, tous ces différents processus magnétiques peuvent être considérés comme des manifestations répondant à l'émergence de tubes de force magnétique naissant en profondeur.

1.5.2 Les taches solaires

La photosphère présente des régions sombres pouvant être très étendues : les taches solaires. Elles sont composées de deux régions concentriques bien distinctes : l'ombre au centre et la pénombre située à la périphérie (Figure 12). Leur observation permet de mesurer la rotation du Soleil ; c'est ainsi que Galilée avait découvert, dés 1613, que le Soleil tourne sur lui-même.

Les taches solaires correspondent à des zones traversées par des champs magnétiques de grande intensité de l'ordre de plusieurs milliers de fois le champ magnétique terrestre. Ces champs magnétiques freinent les particules chargées, ce qui explique la faible température de la tache (4000 °K) due à la forte concentration de champ magnétique qui y règne, inhibant ainsi localement, le chauffage par la convection.

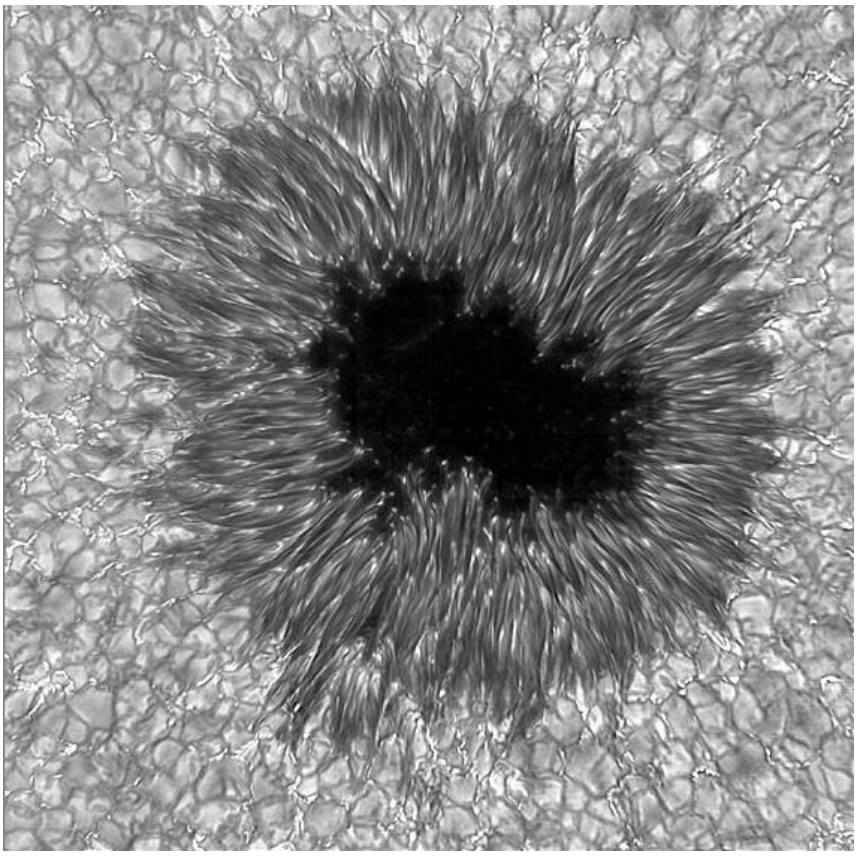

Figure 12 – Tache solaire (KIS/NSO).

Ces zones pouvant atteindre plusieurs centaines de milliers de kilomètres de diamètre, compris entre 5000 et 50000 kilomètres, dont les points d'entrée et de sortie sont de polarités opposées et dont l'orientation, est, en sens inverse, dans l'hémisphère Nord et dans l'hémisphère Sud, apparaissent ou disparaissent en groupe et reviennent régulièrement selon un cycle de onze ans (Figure 13). Ce dernier révélant le cycle d'activité magnétique du Soleil, les taches solaires sont de ce fait un traçeur typique des champs engendrés par effet dynamo qui est à la base de la zone de convection.

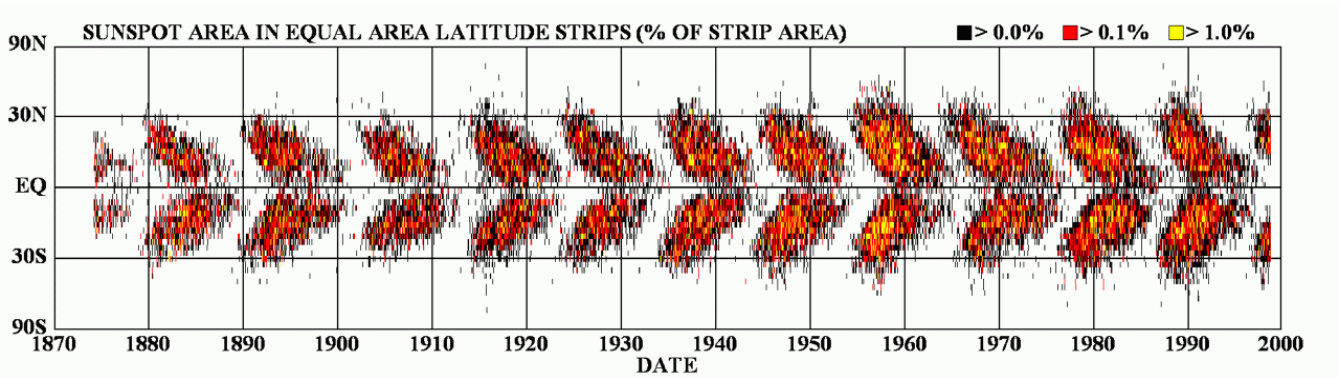

Figure 13 – Diagramme « papillon » illustrant la variation de latitude de formation des taches en fonction de l'activité solaire de 1870 à nos jours.

1.6 Structure magnétique du bord d'une tache solaire et instabilité de Kelvin-Helmholtz

La durée de vie d'une tache solaire est au minimum de quelques jours, un temps long devant les échelles de temps liées aux phénomènes dynamiques, présent dans la photosphère. Ce phénomène résulte du déséquilibre dans la condition non magnéto – hydrostatique.On s'appuie sur le modèle basé sur le Bord de la tache solaire appelé Magnétopause.

La Magnétopause est représentée par une feuille de courant séparant la zone fortement magnétisée, l'intérieur de la tache, de la zone en équilibre magnétohydrodynamique, la photosphère qui est : faiblement magnétisée.

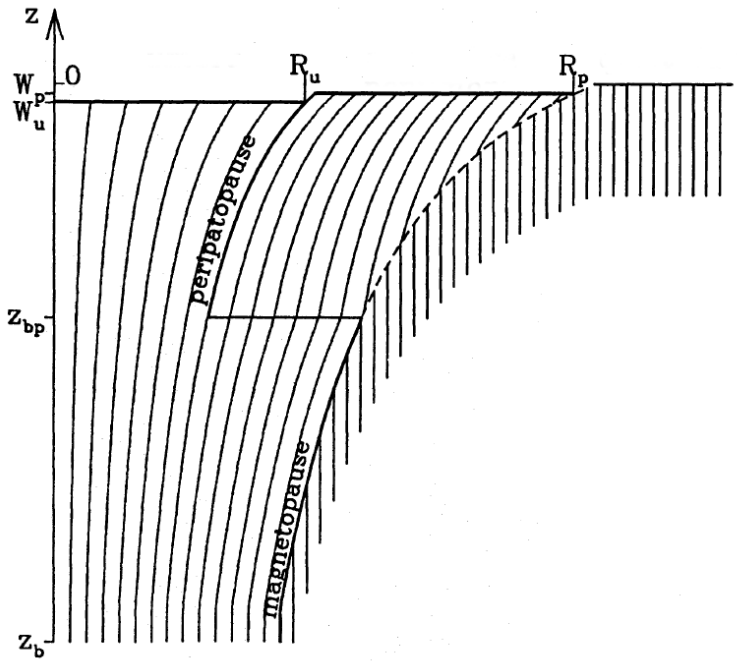

Figure 14 – Schématisation de la magnétopause

Cette feuille de courant, frontière de la tache solaire avec le milieu photosphérique, n'est pas étanche et des échanges de masse, d'impulsion, d'énergie se produisent entre les deux milieux. S'ils sont en mouvement relatif et parallèle à leur feuille de courant, cette dernière peut devenir instable, sous certaines conditions d'écoulement et de plasma. Elle conduit alors à une génération d'instabilité (ondes secondaires) et une turbulence de petite échelle.

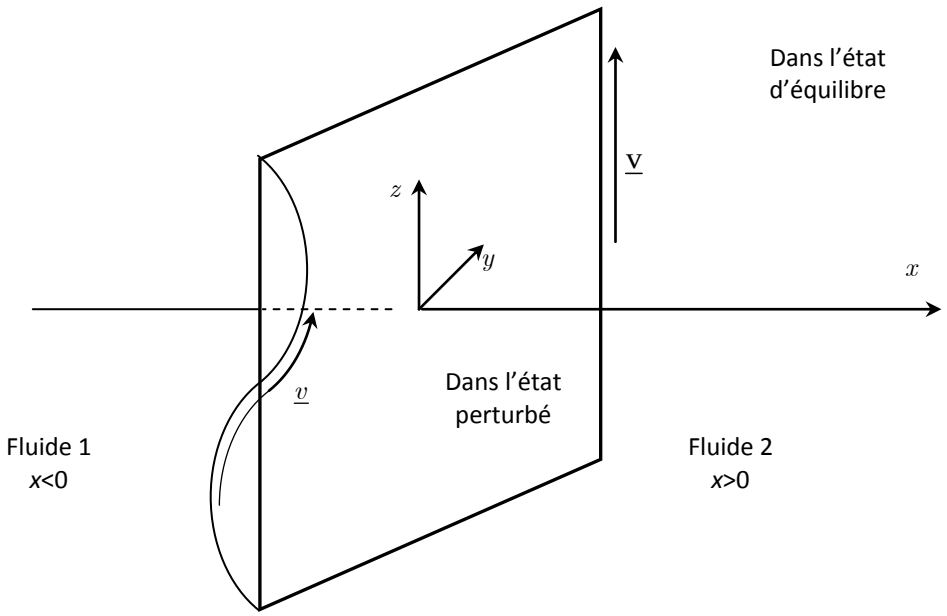

Figure 15 – Plan géométrique de l'instabilité Kelvin-Helmholtz.

Dans notre étude, la modélisation de l'instabilité de Kelvin- Helmholtz qui résulte de la discontinuité hydromagnétique au bord de la tache solaire est étudiée dans l'approximation :

- Géométrie plane (x, z).
- Ecoulements de deux fluides de vitesses relatives et uniformes avec une discontinuité de densité, de direction paralléle au champ magnétique appliqué $B_0\vec{e}_z$.
- Sans effet de Gravité.

Cette configuration d'écoulement de base est illustrée par une forme de nappe de Vorticité- Courant caractéristique de ce mouvement.

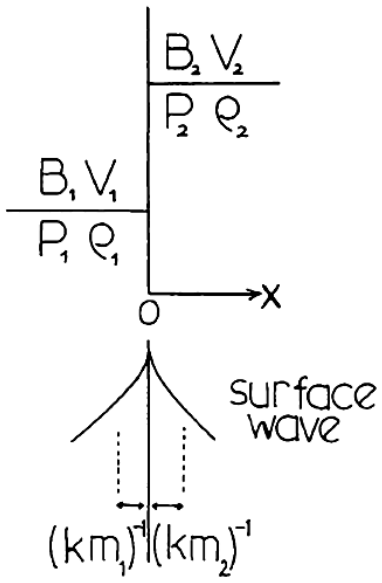

Figure 16 – Géométrie d'une seule nappe vortex-courant.

Ce mécanisme d'instabilité principalement lié à un cisaillement est observé dans le sillage d'un objet selon un jet et une couche de mélange.

En effet, la plupart des travaux portant sur les diverses configurations des écoulements cisaillés ([3], [4], [10]) et, en particulier, sur l'instabilité d'une couche de mélange entre deux milieux en mouvement relatif, conduisent à penser que cette structure ne devrait pas survivre aux sollicitations du milieu ambiant du au développement de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (K-H) (Figure 15).

Dès lors son rôle est fondamental puisque ce type de l'instabilité d'une couche de mélange conduit au déclenchement de la turbulence, produisant par conséquent chauffage et rayonnement.

1.7 Conclusion

La structure magnétique de l'atmosphère solaire apparait non continue qui se caractérise par de très forts gradients.

Dans ce travail, on s'intéresse à la surface de discontinuité plane, afin d'analyser le rôle des ondes hydromagnétiques de surface dans le transport de l'énergie mécanique au niveau des structures inhomogènes de la photosphère et dans la couronne, dont le caractère inhomogène est particulièrement considérable.

De plus on estime, d'après la littérature spécialisée concernant le rôle de la largeur finie des discontinuités, qui est à l'origine du mécanisme stabilité des différentes configurations magnétiques des structures atmosphériques du Soleil.

Dans le travail présenté, on utilise l'approximation d'une interface plane unique. Cette dernière permet de modéliser le bord de la tache solaire afin d'étudier les variations du milieu et d'analyser la stabilité de la discontinuité hydromagnétique qui sépare la tache solaire de son milieu photosphérique.

En effet, le travail de cette thèse se concentre sur la structure localisée autour de la discontinuité, à savoir, le bord de la tache solaire. Malgré la simplicité apparente de ce problème, le plus élémentaire de la structuration magnétique dans la photosphère solaire, il présente néanmoins une phenémologie complexe liées aux caractéristiques de la propagation des ondes, impliquant les ondes de surface magnétohydrodynamiques.

Il s'agit d'établir une relation de dispersion des ondes hydromagnétiques de surface, sans l'effet du champ gravitationnel correspondant à des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité. Comme il est montré que les caractères du mouvement linéaire permettent déjà un nouveau regard sur des problèmes importants comme celui des mouvements générant éventuellement le chauffage de la couronne.

Chapitre 2. Formulation générale de la MHD solaire

2.1 Introduction

La magnétohydrodynamique, par abréviation MHD, parfois appelée hydro-magnétique, est une branche de la physique permettant d'étudier les propriétés, des fluides globalement neutres et conducteurs du courant électrique. En général, le courant est transporté par un gaz d'électrons, provenant des électrons quasi-libres des atomes, ainsi que les fluides partiellement ou entièrement ionisés qu'on appelle plasmas, avec des propriétés différentes, lorsqu'ils sont sujets à un champ magnétique.

Le plasma est défini comme le quatrième état de la matière, obtenu, en portant un gaz à une très haute température. Il est composé de particules, ions chargées positivement et de particules d'électrons, chargées négativement et éventuellement, de particules neutres. Ces particules chargées, composant en partie ou la totalité du plasma, possèdent une énergie cinétique suffisamment grande pour ne pas être liées entre elles par les forces coulombiennes.

Les plasmas sont rares sur Terre mais beaucoup de milieux astrophysiques (99%) sont des plasmas qui peuvent être décrits pas la MHD.

Effectivement, l'omniprésence de la matière ionisée et du champ magnétique dans l'Univers, établis par les différents projets spatiaux et des programmes d'observations, ont permis à la MHD de trouver dans l'Astrophysique un vaste champ d'applications. Celles-ci s'étendent sur un spectre large couvrant, entre autres, la physique spatiale, l'étude des environnements planétaires, la physique de l'atmosphère solaire, la formation stellaire, les études portant sur le milieu interstellaire et plus prés de nous, dans l'environnement terrestre, tel que la magnétosphère et l'ionosphère.

La MHD constitue donc un cadre théorique dans lequel on élabore le cadre explicatif des comportements, modélisés à partir d'observations, des configurations magnétiques des structures photosphériques de notre étoile Soleil.

2.2 Approche théorique de la MHD

Une description MHD de la dynamique d'un plasma magnétisé imposé au niveau des propriétés du milieu et des processus qui s'y développent, reposent sur des hypothèses spécifiques. Car tout plasma ne peut être décrit par les équations de la MHD.

L'étude des plasmas par la théorie MHD nécessite qu'ils puissent être considérés comme un milieu continu assimilable à un fluide unique. Cette approximation monofluide n'est pas forcément valable lorsque le libre parcours moyen d'une particule l^*_{coll} : distance moyenne entre deux collisions successives avec d'autres particules, est plus grand que les échelles de gradient spatiales du milieu.

On parle alors de plasma non collisionnel pour lequel, l'approximation MHD n'est plus satisfaite. Ce qui nécessite un traitement cinétique dans lequel le plasma est sujet à un mécanisme micro -physique particulier lié à sa nature moléculaire, décrit à l'aide d'une fonction de distribution des vitesses et des positions $f\left(\vec{r},\vec{v},t\right)$ associé à l'ensemble des particules.

Pour qu'une approximation d'un plasma, comme un seul fluide soit possible, afin qu'on puisse définir les grandeurs macro-physiques, telles que la densité ou la vitesse, les particules doivent rester localisées. Cette approximation n'est donc valable que dans la mesure où les conditions thermodynamiques varient peu sur des distances de l'ordre du libre parcours moyen l^*.

Cette description sous-entend alors que toutes les espèces chimiques sont suffisamment couplées pour être thermalisées, localisées et suivre une loi de distribution de particule obéissant à la loi Maxwel.

Ce couplage s'opérant entre les éléments d'une même espèce chimique via l'agitation thermique et également entre chacune des populations d'électrons, d'ions et de neutres par des processus collectifs, signifie que pour une description MHD, le mouvement de ces derniers ne peut être décrit séparément.

Le plasma est ainsi en équilibre thermodynamique avec une fonction de distribution Maxwellienne où les temps caractéristiques d'évolution du plasma sont plus grands que les temps de collision $\tau_0 \gg \tau_{coll}$ et les échelles de longueur sont plus grandes que le libre parcours moyen $L_0 \gg l_{coll}$, assurant que la thermalisation du plasma soit effective.

Le couplage entre chacune des populations des particules, et donc une thermalisation, s'opère via une collision collective sur des distances de l'ordre de la longueur éléctronique de Debye λ_D.

Cette distance critique d'interaction collective (au-delà de laquelle l'ion considéré est totalement écranté par les électrons) est nécessaire afin que le plasma puisse être perçu comme électriquement neutre et ainsi le potentiel de Debye d'interaction avec un autre ion devient négligeable. De ce fait, l'écart à la neutralité n'est possible que sur une échelle spatiale inférieure à la longueur de Debye.

Pour ce qui est du couplage propre à chacune des espèces, dans un plasma de Debye, l'agitation thermique domine les collisions collectives à l'échelle interparticulaire. En deviennant négligeables.

Effectivement, l'échelle spatiale L_0, typique de l'étude du comportement macroscopique des plasmas que nous considérons en MHD, doit être plus grande que la longueur de Debye électronique λ_D, le long du champ magnétique $\vec{B}$ pour qu'ils puissent être considérés comme neutres en moyenne locale.

Jusqu'ici, la description qu'on a faite du plasma et l'étude de la validité de l'approximation fluide sont indépendantes de la présence ou non d'un champ magnétique. Celui-ci va en particulier introduire une nouvelle échelle dynamique liée au mouvement cyclotron.

En effet, La giration des particules chargées (électrons ou ions) autour du champ magnétique $\vec{B}$ assure, elle aussi, un mécanisme de localisation de la matière, qui vient compléter les processus collisionnels. Pour cela, dans la direction perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B}$, les particules doivent rester localisées sur des distances de l'ordre du rayon de Larmor R_0, sous peine de les voir se découpler.

De façon plus générale, il faut obligatoirement considérer un problème MHD au niveau macro correspondant à des échelles de temps et de distance beaucoup plus grandes que les échelles d'évolutions microscopiques typiques. Cela est particulièrement vrai, d'une part, pour les échelles de temps et de distance liées aux girations de toutes les particules autour du champ magnétique et d'autre part, pour celles liées au mouvement parallèle au champ magnétique des électrons, afin d'assurer le retour vers la quasi-neutralité.

Il est clair que la théorie MHD, établie dans un tel cadre, ne permet pas de traiter de façon exhaustive la physique des plasmas astrophysiques. L'approche adoptée se limite alors à l'étude du comportement « moyen » qui, par exemple passe outre les processus purement cinétiques, mentionnés précédemment. Mais, elle permet l'analyse rigoureuse de divers problèmes astrophysiques tout en conservant un caractère assez général.

2.2.1 Grandeurs caractéristiques de la MHD en astrophysique

En MHD, le champ magnétique B_0 est, par définition, le paramètre qui contrôle le mouvement de la matière conductrice, tel que le plasma dont l'inertie est caractérisée par la densité ρ_0.

Le calcul adimensionnel lié à l'équation du mouvement permet de relier les échelles spatiales de variations des grandeurs physiques L_0, aux échelles de temps τ_0.

On détermine ainsi la vitesse d'Alfvén : $v_A = \dfrac{B_0}{\left(\mu\rho_0\right)^{1/2}}$ où μ est la perméabilité magnétique du milieu. Cette vitesse est caractéristique des processus MHD mis en jeu dans le plasma et une vitesse du son notée : $c_s = \left(\dfrac{\gamma p_0}{\rho_0}\right)^{1/2}$.

En outre, une hypothèse fondamentale de la MHD est que l'approche classique, par opposition à l'approche relativiste, de l'étude de la dynamique reste valable. Cela sous entend que les vitesses d'Alfvén, sonore et la vitesse de déplacement du plasma soient inférieures à la vitesse de la lumière.

2.3 Équations de la MHD

La description macroscopique du plasma requiert de connaitre, en premier lieu ; les équations régissant les champs électromagnétiques, ainsi que celles décrivant son évolution en fluide. La MHD est alors construite sur la base des équations de l'hydrodynamique, auxquelles on associe les équations de Maxwell. L'ensemble des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm, va se réduire à une équation d'induction décrivant les variations temporelles du champ magnétique. Le système ainsi constitué sera fermé par une équation d'état de la matière.

2.3.1 Equation d'induction

Les évolutions spatio-temporelles du champ électrique et du champ magnétique sont representées par les quatre équations de Maxwell que nous exprimons dans le système international MKSA :

Equation de Poisson :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_q \tag{2.1}$$

Loi de Gauss[1] :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.2}$$

Loi de Faraday :

$$\vec{\nabla} \Lambda \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.3}$$

Loi d'Ampère-Maxwell :

$$\vec{\nabla} \Lambda \vec{H} = \vec{j} + \rho_q \vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{2.4}$$

La première équation (2.1) de ce système exprime que l'induction électrique créée par une charge ponctuelle décroit avec le carré de la distance et qu'en l'absence de charge justifiée par l'électro-neutralité en moyenne locale du milieu, sa divergence est nulle, où ρ_q représente la distribution de charge.

La deuxième équation (2.2) est l'équivalent magnétique de la première, en l'absence de charges magnétiques.

La troisième équation (2.3) exprime la création d'un champ électrique induit par les variations d'induction magnétique, et enfin la quatrième (2.4) exprimant l'induction du champ magnétique par un courant. Cette derniere a pour rôle de fermer ce système d'équations. Pour cela il faut introduire des équations constitutives (ou phénoménologiques) reliant $\vec{H}$ à $\vec{B}$, $\vec{D}$ à $\vec{E}$ et $\vec{j}$ à $\vec{E}$.

Pour un comportement linéaire du milieu conducteur tel que le plasma MHD, on peut écrire pour un milieu au repos lié au référentiel où le plasma est localement au repos on a :

$$\begin{cases} \vec{D} = \underline{\underline{\varepsilon}} \ \vec{E}, \\ \vec{B} = \underline{\underline{\mu}} \ \vec{H}, \\ \vec{j} = \underline{\underline{\sigma}} \ \vec{E}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Remarque : l'isotropie et l'homogénéité du milieu conducteur découlant de façon naturelle des hypothèses qui fondent la MHD, les tenseurs de proportionnalité $\underline{\underline{\mu}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\sigma}}$ peuvent être remplacés par les paramètres scalaires correspondants :

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \ \vec{E}, \\ \vec{B} = \mu \ \vec{H}, \\ \vec{j} = \sigma \ \vec{E}. \end{cases} \tag{2.6}$$

[1] Pas de monopoles magnétiques.

Le plasma que nous considérons étant largement au- dessus de la température de Curie du fer, c'est-à-dire la température au-delà de laquelle l'aimantation ferromagnétique disparaît. Les phénomènes d'aimantation se limitent alors à l'aimantation diamagnétique que l'on peut négliger.

Négliger l'aimantation diamagnétique d'un milieu dilué, linéaire et isotrope tel qu'un plasma MHD, permet d'approximer la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique, à celles du vide $\varepsilon \simeq \varepsilon_0$ et $\mu \simeq \mu_0$ avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H.m^{-1}$ et $\varepsilon_0 = 1/\left(\mu_0 c^2\right) \approx 8.854 \times 10^{-12} F.m^{-1}$.

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \ \vec{E}, \\ \vec{B} = \mu_0 \ \vec{H}, \\ \vec{j} = \sigma \ \vec{E}, \end{cases} \tag{2.7}$$

où la loi d'Ohm généralisée qui traduit, en terme de courant, la réponse d'un milieu conducteur immobile à un champ électrique. Celle-ci peut prendre la forme d'une relation de flux :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \Leftrightarrow \vec{E} = \nu \vec{j},$$

avec σ la conductivité électrique du plasma et ν sa résistivité.

Il est aussi justifié qu'aux échelles de temps correspondant au domaine de la MHD, qu'il est possible de négliger les phénomènes propagatifs $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Notre système d'équations peut etre résumé comme suit :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \Lambda \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \Lambda \vec{H} = \vec{j}, \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \\ \vec{j} = \sigma \ \vec{E}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Il faut à présent exprimer ces relations pour un fluide animé d'une vitesse $\vec{\mathrm{v}}$, dans un référentiel au repos. Ceci signifie évidemment qu'on se place dans le cadre de la mécanique classique, valide pour la MHD, pour laquelle la vitesse caractéristique du fluide est petite devant la vitesse de la lumière, $\left|\vec{\mathrm{v}}\right| \ll c$.

Dés lors on établit les relations suivantes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{2.9}$$

$$\vec{\nabla} \Lambda \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{2.10}$$

$$\vec{\nabla} \Lambda \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \tag{2.11}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \tag{2.12}$$

$$\frac{\vec{j}}{\sigma} = \vec{E} + \vec{\mathrm{v}} \Lambda \vec{B}. \tag{2.13}$$

En particulier, dans l'approximation non relativiste, la loi d'Ohm généralisée prend la forme d'une relation de proportionnalité :

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{\mathrm{v}} \Lambda \vec{B}\right) \Leftrightarrow \left(\vec{E} + \vec{\mathrm{v}} \Lambda \vec{B}\right) = \nu \vec{j}$$

Ainsi, dans l'approximation classique, valide pour la MHD, le champ électromagnétique devient $\vec{E}^* = \vec{E} + \vec{\mathrm{v}} \Lambda \vec{B}$ et $\vec{B} = \vec{B}^*$.

On comprend alors la modification de la loi d'Ohm, reliant les mouvements de la matière aux densités volumiques de courant $\vec{j}$, au champ électrique $\vec{E}$ et au champ magnétique $\vec{B}$, contrairement aux équations de Maxwell, qui elles restent valables dans n'importe quel référentiel.

Dés lors, pour les plasmas MHD, la modification de la relation d'Ampère en accord avec l'équation de Poisson (2.1) et la loi de Gauss (2.9), découlant de la neutralité du plasma qui requiert un courant à divergence nulle $\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0\right)$, c'est–à–dire un courant circulant sur des boucles fermées sans accumulation de charges.

Partant de la loi d'Ohm (2.13), et en utilisant l'équation d'Ampère (2.11), on peut écrire :

$$\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{\nabla} \Lambda \vec{B}\right) = \sigma\left(\vec{E} + \vec{\mathrm{v}} \Lambda \vec{B}\right). \tag{2.14}$$

En prenant le rotationnel de la relation (2.14), et en utilisant l'homogénéité du fluide $\left(\vec{\nabla} \cdot \mu_0 = \vec{0}\right)$, ainsi que la loi de Gauss (2.9), on obtient l'équation suivante :

$$-\frac{1}{\mu_0}\left(\Delta \vec{B}\right) = \sigma\left(\vec{\nabla} \Lambda \vec{E} + \vec{\nabla} \Lambda \left(\vec{\mathrm{v}} \Lambda \vec{B}\right)\right). \tag{2.15}$$

L'équation de Faraday (2.3) donne alors :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\Lambda\left(\vec{v}\Lambda\vec{B}\right) + \frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta\vec{B}. \tag{2.16}$$

Ainsi, la combinaison des équations de Maxwell avec la loi d'Ohm permet d'établir une autre relation fondamentale de la MHD qui vient compléter les équations décrivant l'évolution du fluide.

Cette équation, appelée équation d'induction, exprime l'évolution du champ magnétique à travers son couplage avec la matière et par action d'effets dissipatifs qui s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\Lambda\left(\vec{v}\Lambda\vec{B}\right) + \eta\Delta\vec{B}, \tag{2.17}$$

où $\eta = \dfrac{1}{\sigma\mu_0}$: est le coefficient de diffusion magnétique, supposé uniforme et proportionnel à la résistivité du plasma.

D'où l'équation d'induction en posant $\eta = \dfrac{1}{\sigma\mu_0}$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\Lambda\left(\vec{v}\Lambda\vec{B}\right) + \eta\Delta\vec{B}, \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Les deux termes du membre de droite, dans l'équation d'induction (2.18), décrivent des effets très différents. Le premier est le terme de convection, represente ainsi le mouvement advectif des lignes de champ avec le flot de plasma. Le second terme exprime un mouvement de diffusion, lié à l'effet de dissipation du courant électrique par effet de joule. Ceci se traduit par la diffusion des lignes de champ magnétique et par la rencontre d'une résistance du fait que la conductivité n'est pas infinie $\left(\sigma \neq \infty\right)$.

Pour déterminer l'importance relative des termes d'advection et de diffusion, il faut évaluer leur ordre de grandeur à travers le rapport des forces suivantes :

$$\left\| \frac{\vec{\nabla}\Lambda\left(\vec{v}\Lambda\vec{B}\right)}{\eta\Delta\vec{B}} \right\| \sim \frac{V_0 L_0}{\eta},$$

Il est possible dans le cadre de la MHD de construire un nombre sans dimension dont la valeur, suivant qu'elle soit petite ou grande devant l'unité, indique si le plasma se comporte selon un régime de type advectif ou diffusif. Ce nombre est appelé nombre de Reynolds magnétique qui, est défini comme suit :

$$R_m = \frac{V_0 L_0}{\eta}.$$

Dans la limite où l'advection du champ magnétique est négligeable devant sa dissipation $\left(R_m \ll 1\right)$, c'est-à-dire en l'absence de tout mouvement où les effets diffusifs l'emportent et le champ magnétique est destiné à disparaitre. L'équation d'évolution du champ magnétique se réduit à une simple équation de type diffusion :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta \Delta \vec{B}. \tag{2.19}$$

Cependant, le comportement du plasma solaire est caractérisé par un nombre de Reynolds magnétique très grand devant l'unité $R_m \gg 1$, dans lequel la convection domine et les effets diffusifs y sont peu importants. Dans ces conditions, on est en situation à résistivité nulle ou MHD parfaite.

2.3.2 Équations de l'hydrodynamique

Les équations de l'hydrodynamique, gouvernant les lois du mouvement associées à la masse, la vitesse et l'énergie d'un élément fluide, expriment respectivement les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour un milieu continu. Elles s'écrivent de façon générale pour une particule fluide comme suit :

L'équation de conservation de la masse :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{v}}\right) = 0 \tag{2.20}$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{\mathrm{v}}\right) = 0 \tag{2.21}$$

avec $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{\nabla}$ la dérivée eulerienne des variations temporelles en suivant la particule.

L'équation de transfert de quantité de mouvement :

$$\rho \frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t} + \left(\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{\mathrm{v}} = -\vec{\nabla} p + \left(\vec{j} \Lambda \vec{B}\right) + \rho \vec{g} + \vec{F}, \tag{2.22}$$

L'équation d'énergie :

$$\frac{\rho^{\gamma}}{\gamma-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)+\left(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\kappa\vec{\nabla}T\right)-\Lambda+H, \tag{2.23}$$

Où ρ est la densité. $\vec{\mathrm{v}}$ la vitesse. $\vec{\nabla}p$ la force associée aux gradients de pression, où p est la pression thermique, donnée par l'équation d'état $p=nk_BT$, n est la densité volumique et T la température. $\vec{j}\Lambda\vec{B}$ est la force de Lorentz, dans laquelle $\vec{j}$ est la densité volumique de courant, et $\vec{B}$ est le champ magnétique. $\rho\vec{g}$ est la force de gravité, où $\vec{g}$ est l'accélération de la pesanteur. $\vec{F}$ est la somme des autres forces qui peuvent s'appliquer à la particule fluide considérée, telles que la viscosité, et la force de Coriolis.

Dans l'équation (2.23), γ est l'exposant adiabatique du plasma et κ désigne le tenseur de conduction thermique. Les quantités désignées par Λ exprime l'énergie perdue par les processus de refroidissement du plasma et H indique l'énergie gagnée par les processus de chauffage du plasma.

Les équations (2.21), (2.22) et (2.23) combinées avec l'équation (2.17) constituent les équations de la magnétohydrodynamique. Elles sont fortement couplées et donc difficiles à résoudre, même numériquement. Néanmoins, dans le cadre de la dynamique de l'atmosphère solaire, ces équations peuvent être grandement simplifiées afin de les approcher soit par voie analytique ou numérique.

2.3.3 Force de Laplace

Lorsque l'on établit les équations du fluide qui gouvernent la dynamique d'un plasma, la force de Laplace volumique $\vec{f}_l=\vec{j}\Lambda\vec{B}$ apparait naturellement, compte tenu de l'existence d'un léger décalage de vitesse entre ions et électrons. Nous pouvons y introduire la forme (2.11) de la relation d'Ampère pour négliger le courant de déplacement. Dans ces conditions, on peut évaluer $\vec{f}_l=\left(\vec{\nabla}\Lambda\vec{B}\right)\Lambda\frac{\vec{B}}{\mu_0}$. Ainsi après quelques manipulations algébriques élémentaires on obtient l'expression suivante :

$$\vec{f}_l=-\vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)+\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}. \tag{2.24}$$

Cette écriture « artificielle » de la force de Laplace présente l'avantage d'aider à sa compréhension physique.

Par analogie avec la force volumique créée par la pression thermique, on identifie le premier terme de (2.24) à la force exercée par une pression magnétique définie par :

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Une surpression du champ magnétique correspond à un effet équivalent : une surpression du champ thermique.

Le second terme est appelé tension magnétique qui tend à s'opposer à la courbure des lignes de champ magnétique de façon identique à la tension mécanique s'exerçant sur une corde. En toute logique, son amplitude est inversement proportionnelle au rayon de courbure. En outre, la tension magnétique joue le rôle de force de rappel dans la propagation des ondes MHD et plus particulièrement pour l'onde d'Alfvén, qui est analogue à une onde se propageant sur une corde vibrante.

Ces deux « sous-produits » de la force de Laplace se compensent afin d'exercer une action nulle suivant les lignes de champ magnétique.

2.4 MHD idéale

De façon générale, en Astrophysique, l'importance des étendues spatiales sur lesquelles les processus MHD sont étudiés, fait que le nombre de Reynolds magnétique (R_m) est très grand devant l'unité. À cette échelle, la dynamique du milieu est régie par les mouvements de la matière et les effets dissipatifs sont insignifiants. On parle alors de MHD idéale.

L'équation d'induction prend une nouvelle forme, dans laquelle la composante produisant la diffusion des lignes de champ à travers le plasma, est négligée :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\Lambda\left(\vec{\mathrm{v}}\ \Lambda\ \vec{B}\right). \tag{2.25}$$

Cette dernière, décrivant l'évolution du champ magnétique dans un plasma infiniment conducteur, c'est-à-dire tel que $\nu = 0$, la loi d'Ohm devient alors : $\vec{E} + \vec{\mathrm{v}}\ \Lambda\ \vec{B} = 0$, et dans ce cas, la densité volumique du courant doit être calculée à partir de la relation d'Ampère.

A présent on va développer le rotationnel présent dans l'équation d'induction (2.25), permettant ainsi de faire apparaître l'opérateur de dérivation Euleriénne, appliqué au champ magnétique :

$$\frac{D\vec{B}}{Dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \left(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B} = \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\mathrm{v}} - \vec{B}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{v}}\right) \tag{2.26}$$

Cette formulation fait intervenir la divergence du champ de vitesse, qu'on peut évaluer à travers l'équation de continuité qui peut s'écrire :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\nabla}\rho = -\rho\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{v}}\right) \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{v}} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}.$$

La substitution de cette dernière expression dans l'équation d'induction (2.26) développée, suivie d'une multiplication par $1/\rho$, conduit directement à une équation décrivant l'évolution temporelle de $\vec{B}/\rho$ étant donné le champ de vitesse $\vec{\mathrm{v}}$:

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{B}}{\rho}\right) = \left(\frac{\vec{B}}{\rho}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\mathrm{v}}.$$

Cette équation d'évolution Euleriénne qui indique l'évolution temporelle du champ magnétique est donc une dérivée en suivant le mouvement (notée : $\frac{D}{Dt}$), montre un couplage entre la matière et le champ magnétique pour un plasma non résistif.

Effectivement, selon le théorème énoncé par *H.* Alfvén, stipulant qu'à l'inverse du cas $R_m \ll 1$, où les lignes de champ magnétique peuvent diffuser à l'intérieur du plasma, dans le cadre de la MHD non résistive (idéale) et de fait, en ne tenant pas compte dans l'équation d'induction du terme produisant la diffusion du champ magnétique , les lignes de champ sont « gelées » dans la matière ; signifiant ainsi qu'elles sont transportées par le plasma et ont une évolution similaire à la sienne.

2.5 Résumé des équations

Les équations magnétohydrodynamique fondamentales qui ont été employées sont ainsi écrites pour un plasma solaire comme :

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\Lambda\left(\vec{\mathrm{v}}\Lambda\vec{B}\right) + \eta\Delta\vec{B},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{\mathrm{v}}\right) = 0,$$

$$\rho\frac{\partial\vec{\mathrm{v}}}{\partial t} + \left(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\mathrm{v}} = -\vec{\nabla}p + \left(\vec{j}\Lambda\vec{B}\right) + \rho\vec{g} + \vec{F},$$

$$p = \rho\frac{kT}{m},$$

$$\frac{\rho^\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) + \left(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\kappa\vec{\nabla}T\right) - \Lambda + H.$$

Ces équations sont, en général, couplés et servent à déterminer $\vec{\mathrm{v}}$, $\vec{B}$, p, ρ et T.

En addition, $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont donnés explicitement par : $\vec{j} = \vec{\nabla}\Lambda\vec{B}/\mu_0$, $-\vec{v}\Lambda\vec{B} + \frac{\vec{j}}{\sigma} = \vec{E}$, lorsque $\vec{B}$ est sujet à la condition : $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$.

2.5.1 Conditions de validité

Les suppositions utilisées afin de dériver l'ensemble des équations de base au-dessus sont comme suit :

- Le plasma est traité comme un continum : si $L_0 \gg R_0$ (rayon gyromagnétique).
- Le plasma est supposé être en équilibre thermodynamique, et suivre une loi de distribution de particule obéissant à la loi de Maxwell : si $\tau_0 \gg \tau_{coll}$ (temps de collision), $L_0 \gg l^*_{coll}$ (libre parcours moyen).
- Les coefficients η et μ ont été supposé uniforme. Toutes les propriétés du plasma sont supposées isotropic σ, ε et μ, mais pas toujours du coefficient de la conductivité thermique κ.
- Les effets relativistes sont négligés : les vitesses d'Alfvén, sonore et la vitesse du flux sont toutes supposées plus petite que la vitesse de la lumiére.
- Le plasma est traité comme un seul fluide : à cause des collisions, il n'est pas nécessaire de séparer les comportements de différentes espèces de particules.

2.6 Paramètres sans dimensions

En termes de vitesse caractéristique du plasma (V_0) et de la longueur d'échelle (L_0), l'ordre de grandeur du terme convectif divisé par celui du terme diffusive est un paramétre adimensionel : $R_m = L_0 V_0/\eta$, connu comme le nombre de Reynolds magnétique. C'est une mesure de l'intensité du couplage entre le flux et le champ magnétique.

- **Le nombre de Reynolds** : $R_e = \frac{L_0 V_0}{\nu}$; donne le rapport de la grandeur du terme inertiel et celle du terme visqueux dans l'équation du mouvement.
- **Le nombre de Mach** : $M = \frac{V_0}{c_s}$; mesure la vitesse du flux (V_0) relative à la vitesse sonore : $c_s = \left(\gamma p_0/\rho_0\right)^{1/2}$.

- **Le nombre de Mach d'Alfvén** : $M_A = \frac{V_0}{v_A}$;donne l'ordre de grandeur de la vitesse du flux par rapport à celle d'Alfvén : $v_A = \frac{B_0}{\left(\mu\rho_0\right)^{1/2}}$, où B_0 et ρ_0 sont l'intensité du champ magnétique caractéristique et la densité du plasma.

- **Le Beta du plasma** : $\beta = \frac{2\mu p_0}{B_0^2}$; est la pression du plasma $\left(p_0\right)$ divisée par la pression magnétique.

- **Le nombre de Rayleigh** : $\mathrm{Ra} = \frac{gL_0^3\alpha\Delta}{\kappa\nu}$, mesure l'influence considerable de la force d'Archiméde relative aux effets stabilisants de la diffusion non magnetique et qui est beaucoup plus grande que l'unité dans la zone convective (Tableau 2).

Couche considerée / Nombre sans dimension	Zone convective	Photosphére	Chromosphére	Couronne
Mach : $M = \frac{V_0}{c_s}$	10^{-2}	10^{-1}	1	10^{2}
Reynolds magnétique : $R_m = \frac{V_0 L_0}{\eta}$	1	10^{5}	10^{6}	10^{12}
Beta : $\beta = \frac{2\mu p_0}{B_0^2}$	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-4}
Reynolds : $R_e = \frac{L_0 V_0}{\nu}$	10^{12}	10^{11}	10^{10}	10^{3}
Rayleigh : $\mathrm{Ra} = \frac{gL_0^3\alpha\Delta}{\kappa\nu}$	10^{25}			

Tableau 2 – Tableau rassemblant les valeurs des paramètres sans dimension dans les zones MHD du Soleil

2.7 Conclusion

On peut en tirer les conclusions suivantes :

- Incompressibilité : cette approximation est valable sur la photosphère et en dessous $\left(M << 1\right)$, mais pas dans la couronne.
- Gel du champ dans le plasma : ceci est vrai dans l'atmosphère en général $\left(R_m >> 1\right)$, mais pas dans la zone convective.
- Réactions du champ sur les mouvements : on trouve ici une variété de situations intéressante, selon les valeurs de β.

  Dans la couronne et la chromosphère, $\beta << 1$, donc toutes les forces sont négligeable devant la force magnétique, et alors : $\vec{j} \Lambda \vec{B} = \vec{0}$. On parle de champ sans force de Laplace.

  A l'opposé, dans la zone convective, $\beta >> 1$, donc la force est négligeable devant les autres forces. On parle de dynamo cinématique.

  Entre les deux, la photosphère représente le cas idéal où $\beta \sim 1$, donc les forces de pression et magnétique sont du même ordre. On parle alors de dynamo MHD.
- Turbulence : les valeurs élévées du nombre de Reynolds laissent prévoire que le milieu est turbulent.
- Convection : le milieu est le siège d'une convection développée, dont la granulation et la supergranulation sont les manifestations en surface.

Deuxième Partie :

Approche Analytique du Probleme et Resultats

Chapitre 3. Approche du phénoméne d'instabilité de type Kelvin-Helmholtz

3.1 Introduction

Le développement des modes de Kelvin-Helmholtz est le processus instable le plus étudié dans le cadre de la physique des écoulements cisaillés. Cette instabilité est apparue comme inévitable pour rendre compte de la physique du probléme au niveau de la modélisation des écoulements cisaillés magnétisés ([40], [41]), et ([18]), elle est restée au cœur de l'activité sur la stabilité. En outre, les traveaux menés en Astrophysique sur ce sujet ont pu se reposer sur les nombreuses études effectuées au paravant dans le modèle hydrodynamique tel que l'a proposé Chandrasekhar [10].

L'origine physique de l'instabilité de Kelvin- Helmholtz est basée sur la donnée de deux fluides qui sont en mouvement relatif de part et d'autre d'une frontiére commune. On peut la schématiser par la surface plane séparant l'eau de mer balayé par un vent paralléle entrainant l'apparition des vagues. L'approche mathématique de ce type d'instabilité apparait à travers une modélisation à partir de l'équation de Bernouilli. En effet, lorsqu'une oscillation se forme à l'interface entre les deux fluides, l'équilibre des pressions est modifié conduisant à l'accroissement de l'amplitude des oscillations.

En général, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, se développe dans un milieu présentant un fort gradient de vitesse qui, s'accompagne souvent d'un transfert ou mélange de matiére à travers la frontière interfaciale.

Dans une couche de mélange, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz donne naissance à une famille de modes qu'on appelle « modes de Surface » qui sont confinés dans la région où le gradient de vitesse, entre les deux milieux, est considérable et est localisé au voisignage de l'interface. En particulier, le travail de Rae, donne un apperçu générale de l'état des connaissances théoriques sur l'instabilité de Kelvin-Helmholtz dans le

cadre d'une couche de mélange photosphérique. Du point de vue numérique, le probléme a également été abordé.

3.2 Théorie des ondes MHD parfaites dans les milieux présentant une structure magnétique

L'atmosphère solaire de la photosphère jusqu'à la couronne est fortement structurée, milieu non homogène, elle est structurée par la gravité et la présence du champ magnétique.

La gravité introduit une stratification verticale dans une atmosphère loin d'être uniforme, alors que le champ magnétique peut introduire aussi bien une stratification transversale que longitudinale. Le sens de la direction est déterminé par celui du champ magnétique.

La théorie des ondes MHD parfaites dans les milieux présentant une structure magnétique telle que l'atmosphère solaire, nullement continue et caractérisée par de très forts gradients, permet d'étudier un aspect de son inhomogénéité. À savoir, la nature de la propagation des ondes dans une atmosphère structurée par un champ magnétique non uniforme, où l'effet de gravité est ignoré afin de considérer le cas d'une stratification qui peut être verticale, modifiant ainsi les ondes par l'effet de la force de Laplace $\vec{J}\Lambda\ \vec{B}$ qui résulte $\left(\vec{J} \neq 0\right)$ de son inhomogénéité.

On trouve alors, les ondes de volume (body waves) prévues par la théorie des ondes dans les milieux homogènes (ondes en $e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\ \omega t\right)}$, ω et $\vec{k}$ réels) qui remplissent tout l'espace, on trouve aussi les ondes de surface dont l'amplitude est nulle, sauf dans le voisinage des régions où $\vec{B}$ change (Figure 17).

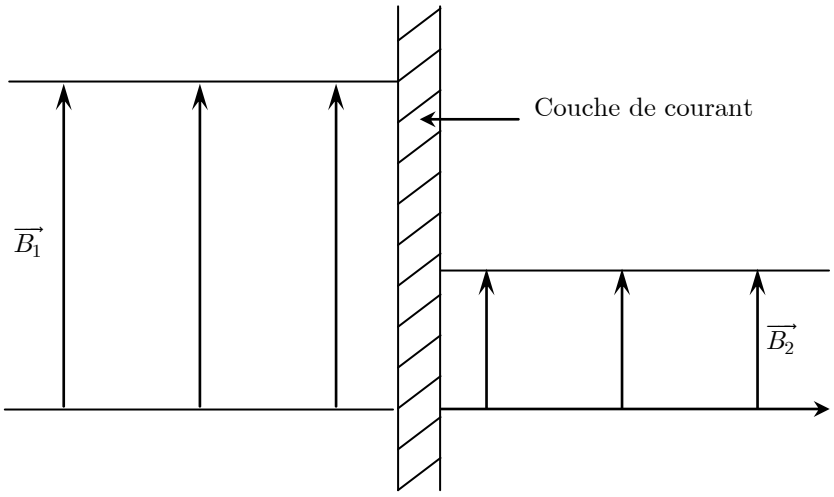

Figure 17 – Schéma montrant la couche de courant.

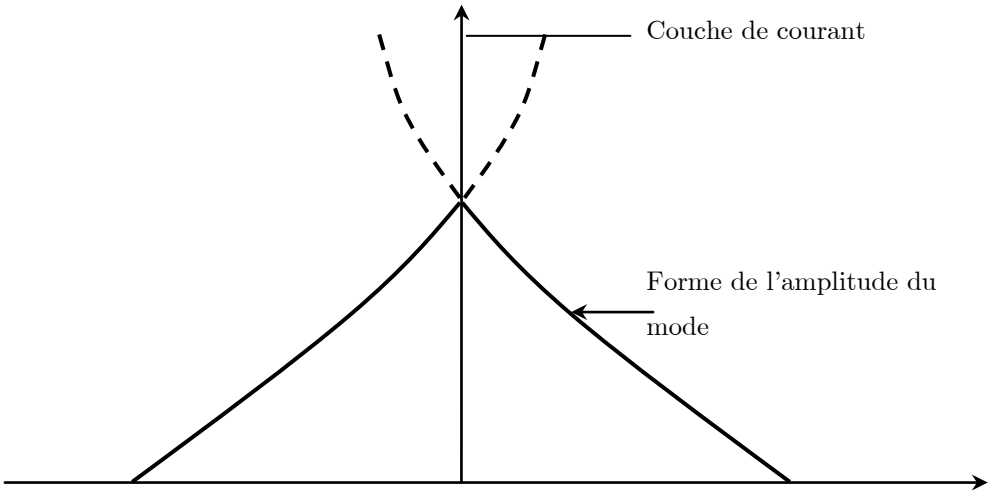

Figure 18 – Forme de l'amplitude du mode de surface.

Ainsi pour $\vec{B}_0\left(x\right)$ comme ça les ondes de surface sont des perturbations qui ont un vecteur d'onde perpendiculaire (prallele à ox) imaginaire, c'est-à-dire dont l'amplitude décroit exponentiellement en s'éloignant de la discontinuité (

Figure 18).

Les modèles les plus élémentaires de la structuration du champ magnétique, comme celui d'une seule interface magnétique, deux interfaces parallèles magnétiques (Slab) ou un tube de flux isolé, présentent, malgré leurs simplicités, une exhibition complexe des caractéristiques de la propagation des ondes, impliquant, respectivement, les ondes de surface et les ondes de volume magnétohydrodynamique (Figure 19).

Une seule interface magnétique, dans laquelle la grandeur du champ magnétique change de façon discontinue d'un endroit à un autre (Figure 19), est une représentation raisonnable de la structure du champ dans plusieurs indicateurs solaires, à savoir, le bord d'une grande tache solaire (la limite inférieure du champ magnétique pénombral) et la limite d'un trou coronal.

Le tube de flux et le Slab (deux interfaces parallèles), dans lesquels, le champ magnétique change de façon discontinue, à deux endroits, ont une application plus grande (Figure 19).

Dans la photosphère solaire, les observations montrent des concentrations étroites du champ magnétique tel que les tubes intenses, les pores et les taches.

Ces structures concentrées et fortement inhomogènes peuvent être modélisées comme un tube de flux ou un Slab où deux feuilles de courant sont présentes et qui les

délimitent de leurs milieux environnants : le Soleil calme. Aussi, dans la couronne, la structure boucle, peut être modelée par un Slab ou un tube de flux.

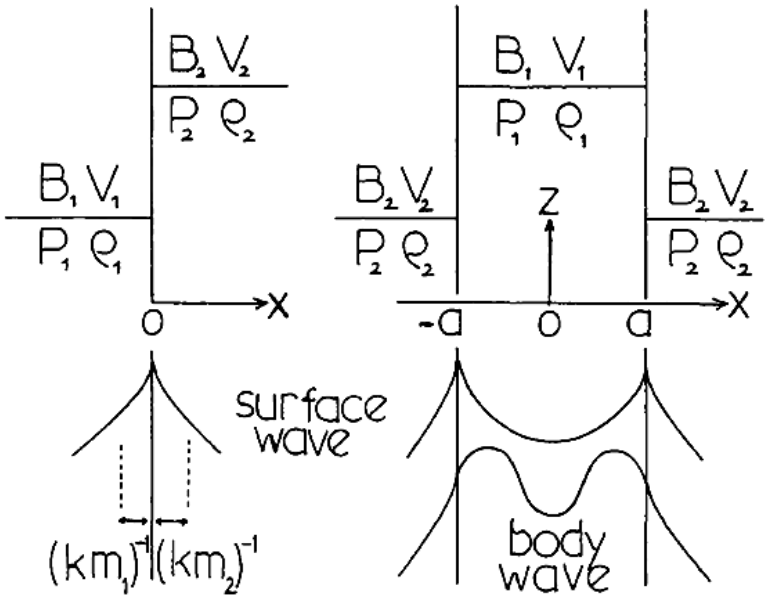

Figure 19 – Ondes de surface et de volume sur une seule interface et dans un slab ou un cylindre

Une seule interface exhibe explicitement les ondes de surface, soutenues par la discontinuité du champ magnétique, représentant donc des perturbations dont l'énergie s'emmagasine et se propage le long de la surface de discontinuité.

Ces ondes peuvent jouer un rôle important dans le transport de l'énergie mécanique dans la couronne, dont le caractère inhomogène est particulièrement notoire, mais aussi dans les structures inhomogènes de la photosphère. C'est pourquoi, il est intéressant d'étudier le rôle qualitatif de l'inhomogénéité au bord d'une tache solaire sous la forme d'une prescription, pour son fort gradient de vitesse et de champ magnétique.

La modélisation de cette structure par une seule interface plane, qui sépare la zone fortement magnétisée, l'intérieur de la tache, de la zone environnante faiblement magnétisée, la photosphère, est nécessaire afin d'analyser le mouvement linéaire des modes magnétosonores de surface.

Les équations de base adaptées à la description de ce type de mouvement sont les équations de la MHD linéarisées. Pour cela, il convient de commencer notre étude en rappelant la nature de la propagation des ondes dans un milieu homogène et illimité, en présence d'un champ magnétique uniforme.

3.3 MHD linéaire dans un plasma homogène

Dans cette section, seront dérivées les relations de dispersion des modes linéaires pouvant se propager dans un plasma homogène et sans mouvement d'équilibre, en réponse à une perturbation initiale de faible amplitude. Ces ondes MHD sont les ondes d'Alfvén et les ondes magnétosonores lentes et rapides.

L'existence et le type de propagation de ces différents modes MHD possibles en milieu spatialement homogène et uniforme, imprégné par un champ magnétique également homogène et uniforme, $B_0\vec{e}_z$ en l'absence de toute autre force, comme la gravitation, bien qu'à priori est éloignée du contexte de la propagation linéaire des ondes sur une surface de discontinuité magnétique, va nous permettre de voir comment les caractéristiques des modes coexistants dans un plasma MHD magnétisé et homogène sont changés lorsque le milieu est stratifié.

Bien que l'on assimile le plasma à un seul fluide composé d'une seule espèce, on ne néglige pas le faible écart de vitesse entre les électrons et les protons, c'est-à-dire le courant circulant dans le plasma.

En présence du champ magnétique, ce courant va considérablement complexifier la dynamique du fluide à travers la force de Lorentz. Alors que dans un milieu immobile, sans gravité, les seuls modes présents sont les ondes longitudinales sonores dues à la compression du fluide. Dans un plasma MHD magnétisé coexistent les ondes transverses d'Alfvén dont le moteur est la tension magnétique et les ondes magnétosonores, produites par des variations dans la pression totale du plasma (thermique et magnétique).

La présence du champ magnétique introduit une direction préférentielle dans le fluide puisque les propriétés des modes dépendent de leur direction de propagation par rapport au champ magnétique.

3.3.1 Une formulation linéarisée de la MHD

La dynamique d'un plasma MHD est, ainsi qu'illustrée dans le chapitre 2, décrite par un système de huit équations couplées, aux dérivées partielles.

L'équation de continuité qui décrit l'évolution de la densité de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{\mathrm{v}}\right). \tag{3.1}$$

L'équation du mouvement qui traduit la relation fondamentale de la dynamique, en omettant les termes de dissipation (conductivité thermique infinie, viscosité nulle) :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{\mathrm{v}}}{\partial t}+\left(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\mathrm{v}}\right)=-\vec{\nabla}\mathrm{p}+\frac{\left(\vec{\nabla}\Lambda\vec{B}\right)\Lambda\vec{B}}{\mu}, \tag{3.2}$$

où p représente la pression thermique du plasma.

L'évolution du champ magnétique est donnée par l'équation d'induction, dans laquelle, on néglige le terme de diffusion pour une MHD idéale :

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{\nabla}\Lambda\left(\vec{\mathrm{v}}\Lambda\vec{B}\right) \tag{3.3}$$

Ce système d'équations est fermé par l'introduction de l'équation d'état d'un plasma adiabatique $\frac{d}{dt}\left(p\rho^{-\gamma}\right)=0$, ce qui devient dans une formulation eulérienne :

$$\frac{\partial\mathrm{p}}{\partial t}=-\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\nabla}\mathrm{p}-\gamma\mathrm{p}\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{v}}, \tag{3.4}$$

où γ est l'indice adiabatique du milieu.

Une description MHD linéaire de la dynamique d'un plasma uniforme et homogène, sans champ gravitationnel $\left(\vec{g}=0\right)$ et immergé dans un champ magnétique constant, permet d'appréhender le comportement physique du plasma dans l'hypothèse de petits écarts à l'équilibre dynamique.

Par conséquent, elle consiste dans un premier temps à décrire les quantités suivies par les équations comme étant la somme d'un terme d'ordre zéro, invariant dans le temps et l'espace, et d'une petite perturbation de ce terme du premier ordre : $\mathrm{x}=X_0+x$ avec $\left|x\,/\,X_0\right|<<1$, puis dans une seconde phase, une fois que l'on a injecté cette prescription des grandeurs physiques dans les équations, on néglige les termes produits de perturbations : $\left|x\,/\,X_0\right|>>\left|x\,/\,X_0\right|^n$. On obtient ainsi un système d'équations linéaires décrivant l'évolution des écarts à l'équilibre.

Partant donc d'un équilibre uniforme : $\rho_0, P_0, \vec{V}_0=\vec{0}$, $\vec{B}_0=B_0\vec{e}_z$ avec des perturbations respectives ρ, p, $\vec{v}, \vec{b}$, les équations présentées ci-dessus deviennent dans leur formulation linéarisée :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\rho_0\vec{\nabla}\cdot\vec{v}, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial\vec{b}}{\partial t}=\vec{\nabla}\Lambda\left(\vec{v}\Lambda\vec{B}_0\right), \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\gamma P_0\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right), \tag{3.7}$$

$$\rho_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-\vec{\nabla}p+\frac{\left(\vec{\nabla}\Lambda\vec{B}_0\right)\Lambda\vec{b}}{\mu}+\frac{\left(\vec{\nabla}\Lambda\vec{b}\right)\Lambda\vec{B}_0}{\mu}. \tag{3.8}$$

La méthode la plus couramment utilisée pour résoudre ce système d'équations, à savoir, l'analyse des petits mouvements (mouvement linéaire) d'un plasma magnétisé, est le principe de la décomposition en modes propres. Pour cela, nous allons chercher à mettre en évidence les fréquences caractéristiques qui tendent naturellement à se développer dans le plasma.

3.3.2 Modes MHD en milieu homogène

Ces équations prédisent l'existence des modes magnétohydrodynamiques, correspondant aux modes compressifs et mode sans compression, les premiers étant les modes MHD lents et rapides, et le second étant le mode d'Alfvén, aussi appelé mode torsionnel.

Pour séparer ces modes dés le départ, il est utile d'utiliser des équations pour $\Delta = \mathrm{div}\vec{v}$, qui n'est non nulle, que pour les premiers et une autre variable, disons $v_z = \vec{v} \cdot \frac{\vec{B}_0}{|B_0|}$, représentant la vitesse perturbée $\vec{v}$ dans la direction du champ magnétique.

Pour un équilibre uniforme, les équations non-dissipatives (3.6) et (3.8) sont remplacées par :

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \vec{\nabla}\Lambda\left(\vec{v}\Lambda\vec{B}_0\right) = \vec{B}_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} - \vec{B}_0\Delta, \tag{3.9}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla}p + \frac{1}{\mu}\left(\vec{B}_0 \cdot \frac{\partial \vec{b}}{\partial z} - \vec{\nabla}\left(\vec{B}_0 \cdot \vec{b}\right)\right). \tag{3.10}$$

En introduisant les carrés des vitesses du son et d'Alfvén $c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$ et $v_A^2 = \frac{B_0^2}{\mu\rho_0}$, dans l'équation de quantité de mouvement, tout en sachant que $\Delta = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)$, on réduit l'ensemble des équations de la MHD à une seule équation (vectorielle) portant sur le vecteur de la vitesse perturbée, comme suit :

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = c_0^2\vec{\nabla}\Delta + v_A^2\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} - \vec{e}_z\Delta\right) - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} - \Delta\right)\right), \tag{3.11}$$

où $\vec{e}_z$ est le vecteur unitaire dans la direction-z.

En prenant la divergence et la composante -z de cette équation vectorielle, on obtient, respectivement, ces deux équations linéaires, gouvernant ces modes magnétohydrodynamiques (voir, [12], [23]):

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = \left(c_0^2 + v_A^2\right)\nabla^2\Delta - v_A^2\nabla^2\Gamma, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} = v_A^2 \frac{\partial \Delta}{\partial z}, \tag{3.13}$$

où $\Gamma = \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$ et ∇^2 est l'opérateur Laplacien tridimensionnel.

Eliminons v_z en dérivant deux fois (3.12) par rapport au temps et en remplaçant $\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial t^2}$ par (3.13), il reste une équation unique pour la compression, notée Δ :

$$\frac{\partial^4 \Delta}{\partial t^4} - \left(c_0^2 + v_A^2\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\nabla^2\Delta\right) + c_0^2 v_A^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\nabla^2\Delta\right) = 0 \tag{3.14}$$

Une solution de l'équation (3.14) est $\Delta = 0$, pour laquelle $v_z = 0$, $\rho = p = 0$ et selon l'équation (3.11), donne directement l'équation différentielle linéaire du mouvement ondulatoire de la vitesse perturbée à coefficient constant :

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = v_A^2 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}, \tag{3.15}$$

correspondant aux ondes transverses d'Alfvén qui se propagent en suivant les lignes de champ magnétique uniforme sans aucune compression dans le plasma.

Pour $\Delta \neq 0$, l'équation d'onde scalaire (3.14), est une équation linéaire avec des grandeurs d'équilibres uniformes, il est donc possible de chercher des solutions sous la forme de modes de Fourier temporels et spatiaux, en prenant : $\Delta = \hat{\Delta}\left(x\right)e^{i\left(ly+kz-\omega t\right)}$, où ω est la fréquence angulaire et l, k sont les nombres d'ondes dans les directions y, z, l'équation (3.14) montre alors que $\hat{\Delta}\left(x\right)$ satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2\hat{\Delta}}{dx^2} - \left(l^2 + m_0^2\right)\hat{\Delta}\left(x\right) = 0, \tag{3.16}$$

où $m_0^2 = \dfrac{\left(k^2c_0^2 - \omega^2\right)\left(k^2v_A^2 - \omega^2\right)}{\left(c_0^2 + v_A^2\right)\left(k^2c_T^2 - \omega^2\right)}$, et $c_T^2 = \dfrac{c_0^2 v_A^2}{c_0^2 + v_A^2}$ est une vitesse caractéristique plus petite que c_0 et v_A.

Pars ailleurs, sachant que $\hat{\Delta}\left(x\right) \sim e^{inx}$, l'équation (3.16) peut être écrite sous la forme qui donne la somme de la longueur du vecteur d'onde perpendiculaire $k_\perp^2 = n^2 + l^2$ et

le terme opposé m_0^2, défini en fonction de la fréquence ω et la longueur du vecteur d'onde parallèle $k_\parallel^2 = k^2$. Ceci conduit à établir ci-après :

$$n^2 + l^2 + m_0^2 = 0, \tag{3.17}$$

que l'on peut réecrire sous la forme suivante :

$$n^2 + l^2 = -m_0^2 = M\left(\omega, k\right), \tag{3.18}$$

on trouve alors l'équation bicarrée en ω :

$$\omega^4 - \omega^2\left(c_0^2 + v_A^2\right)\left(k_\perp^2 + k_\parallel^2\right) + c_0^2 v_A^2\left(k_\perp^2 + k_\parallel^2\right)k_\parallel^2 = 0, \tag{3.19}$$

ou encore :

$$\omega^4 - \kappa^2\left(c_0^2 + v_A^2\right)\omega^2 + \kappa^2 k^2 c_0^2 v_A^2 = 0, \tag{3.20}$$

où l'on a posé la longueur du vecteur d'onde $\kappa^2 = \left(n^2 + l^2 + k^2\right) = \left(k_\perp^2 + k_\parallel^2\right)$, et admettant des solutions pour $\left(\frac{\omega}{\kappa}\right)^2$ réelles et positives.

En effet, on établit l'expression de la vitesse :

$$v_{R,L}^2 = \left(\frac{\omega}{\kappa}\right)_{R,L}^2 = \frac{1}{2}\left[\left(c_0^2 + v_A^2\right) \pm \sqrt{\left(c_0^2 + v_A^2\right)^2 - 4c_0^2 v_A^2\left(\frac{k_\parallel}{\kappa}\right)^2}\right]. \tag{3.21}$$

On parle alors de modes stables dont les modes magnétosonores rapides pour le signe $(+)$, puisqu'ils correspondent à une vitesse de phase plus rapides et des modes magnétosonores lents pour le signe $(-)$.

3.3.3 Modes d'Alfvén

Les modes normaux correspondant à la relation (3.15) sont appelés ondes ou modes d'Alfvén dont la solution pour la fréquence angulaire ω essentiellement réelle et positive, sont :

$$\omega^2 - k_\parallel^2 c_0^2 = 0. \tag{3.22}$$

La vitesse de phase de l'onde d'Alfvén a donc pour expression

$$\vec{v}_\varphi = \frac{\omega}{\kappa} = \pm v_A \cos\left(\theta\right), \tag{3.23}$$

Ceci signifie que la propagation est anisotrope avec $\theta = \widehat{\left(\vec{\kappa}, \vec{B}_0\right)}$ étant l'angle entre le champ magnétique $\vec{B}_0$ non perturbé et le vecteur d'onde $\vec{\kappa}$ caractérisé par la relation $k_\parallel = \kappa\cos\left(\theta\right)$.

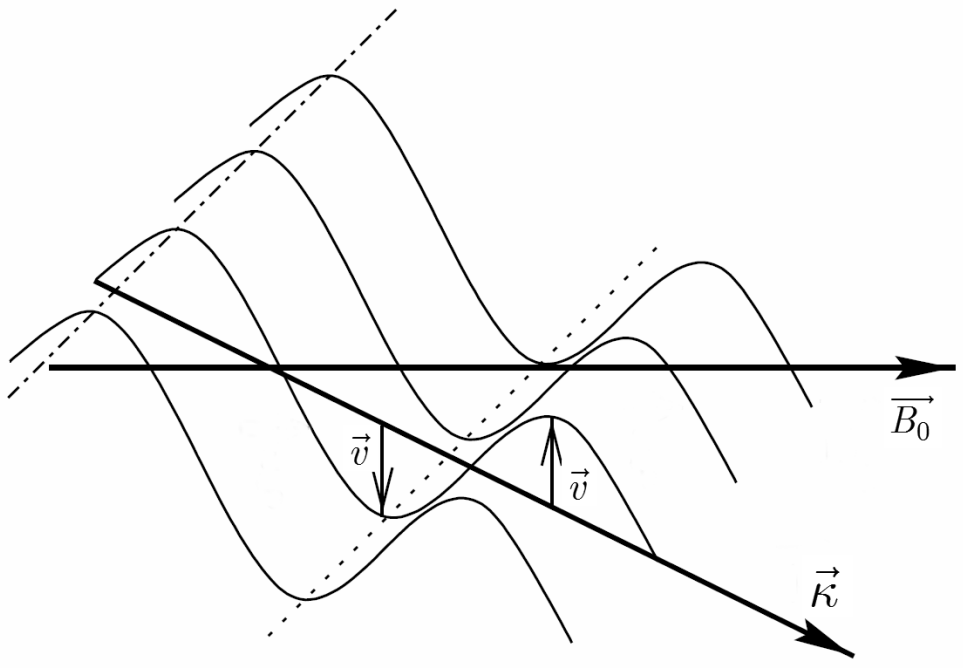

Figure 20 – Propagation d'une onde d'Alfvén.

On constate sur la Figure 20, à la lecture de la relation (3.22), que ces ondes se propagent suivant la direction du champ magnétique et que, non seulement elles correspondent à la propagation d'un ébranlement transverse, c'est-à-dire perpendiculaire au vecteur d'onde $\vec{\kappa}$, auquel s'ajoute le déplacement orthogonale par rapport aux lignes de champ magnétique non perturbé. De même, la relation de continuité (3.5) et l'équation d'état (3.7) montrent que les perturbations des grandeurs thermodynamiques restent dans ce cas invariables $\rho = 0$ et $p = 0$. L'onde ne s'accompagne d'aucune variation linéaire de la densité et de la pression thermique du plasma. On dit que le mode d'Alfvén est de nature incompressible.

Toute perturbation d'Alfvén est en réalité un paquet d'ondes d'Alfvén qui se déplace à la vitesse de groupe : $\vec{v}_g = \dfrac{\partial \omega}{\partial \vec{\kappa}}$.

Pour une onde d'Alfvén, on a : $\omega = \pm k_{\parallel} v_A$, permettant d'établir : $\vec{v}_g = \pm v_A \vec{e}_z$.

Les paquets d'ondes d'Alfvén suivent le champ magnétique de repos dans l'un ou l'autre sens. Ce sont, dans ce cas, des perturbations de courant électrique qui se déplacent à la vitesse v_A selon le champ magnétique non perturbé $\vec{B}_0$.

3.3.4 Modes magnétosonores

Selon le signe choisi, il existe deux types de modes décrits par l'équation (3.21). Ces modes sont appelés ondes rapides et ondes lentes, selon l'importance du module associé à la vitesse de phase. On peut étudier les variations de cette vitesse de phase en fonction de la direction de propagation, mesuré par l'angle $\theta = \widehat{\left(\vec{\kappa}, \vec{B}_0\right)}$.

Le mode rapide a une vitesse de phase v_R telle que :

$$v_R^2 = \frac{1}{2}\left[\left(c_0^2 + v_A^2\right) + \sqrt{\left(c_0^2 - v_A^2\right)^2 + 4c_0^2 v_A^2 \sin^2\theta}\right]. \tag{3.24}$$

Le mode lent une vitesse v_L donnée par :

$$v_L^2 = \frac{1}{2}\left[\left(c_0^2 + v_A^2\right) - \sqrt{\left(c_0^2 - v_A^2\right)^2 + 4c_0^2 v_A^2 \sin^2\theta}\right]. \tag{3.25}$$

On voit bien que la différrence entre v_R et v_L réside dans le terme $\pm$ associé au discriminanat de vitesse :

$$\Delta = \sqrt{\left(c_0^2 - v_A^2\right)^2 + 4c_0^2 v_A^2 \sin^2\theta}\,.$$

Contrairement aux ondes d'Alfvén ou aux ondes sonores, les ondes magnétosonores ne sont ni transverses, ni longitudinales. Dans le cas général, elles se propagent dans le plan formé par les vecteurs $\vec{\kappa}$ et $\vec{B}_0$, avec des célérités v_R et v_L données par les relations correspondantes à (3.24) et (3.25). Toutefois, il est possible de préciser deux comportements limites, car ces deux vitesses varient de façon monotone lorsque θ varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Lorsque la propagation est parallèle $\left(k_\perp = 0,\ \theta = 0\right)$, les vitesses de phase sont respectivement données par :

$$v_R^2 = \frac{1}{2}\left[\left(c_0^2 + v_A^2\right) + \left|c_0^2 - v_A^2\right|\right], \tag{3.26}$$

et

$$v_L^2 = \frac{1}{2}\left[\left(c_0^2 + v_A^2\right) - \left|c_0^2 - v_A^2\right|\right]. \tag{3.27}$$

Les ondes magnétosonores se décomposent, d'une part, en une onde sonore longitudinale pure et, d'autre part, en une onde d'Alfvén transversale. Dans ce cas on a une dégénérescence des ondes d'Alfvén.

On observe sur la Figure 21 que lorsque la propagation est perpendiculaire aux lignes de champ magnétique $\left(k_{\parallel} = 0, \theta = \frac{\pi}{2}\right)$, dans ce cas les deux vitesses de phase sont réduites à :

$$v_R^2 = \left(c_0^2 + v_A^2\right), \tag{3.28}$$

et

$$v_L^2 = 0. \tag{3.29}$$

qui montrent un mode lent dont les vitesses de phase et de groupe sont nulles caractérisé par un mode qui ne se propage pas. Le mode rapide quant à lui, devient longitudinal et sa propagation se fait avec une célérité maximale $v_R = \sqrt{\left(c_0^2 + v_A^2\right)}$, correspondant à un mode sonore dont on aurait modifié sa structure, en la remplaçant par la pression totale (thermique + magnétique).

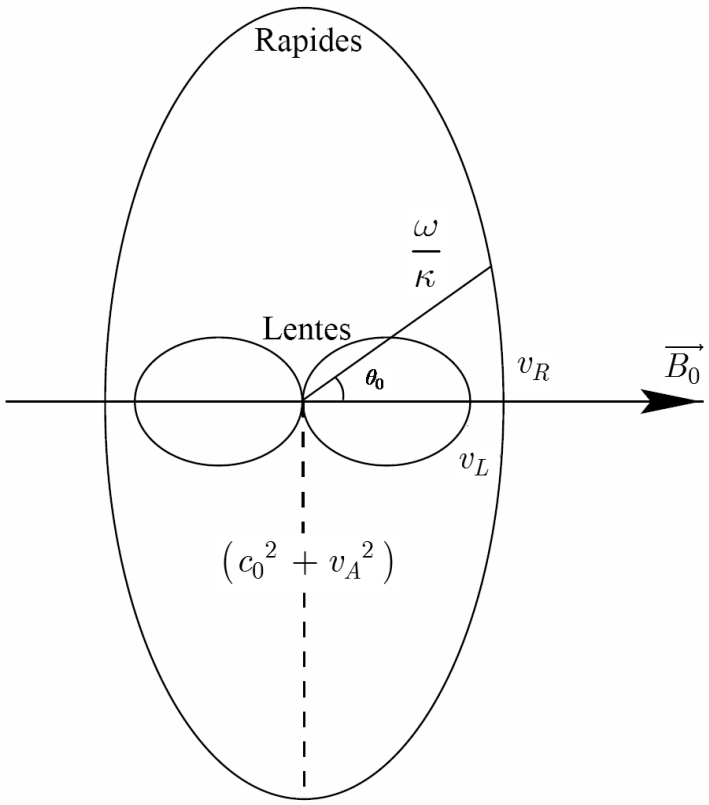

Figure 21 – Célérité des ondes magnétosonores se propageant avec un angle θ_0 relativement à $\vec{B}_0$

La relation de dispersion (3.19) où (3.20) des deux modes montre ainsi que l'onde magnétosonore lente a une vitesse de phase $\frac{\omega}{\kappa}$, dans la gamme $0 \leq v_L \leq \min\left(c_0, v_A\right)$, où elle prend la limite supérieure pour une propagation parallèle au champ magnétique. Il en résulte que l'onde lente ne peut se propager perpendiculairement au champ.

En outre, on note que l'onde magnétosonore rapide a une vitesse de phase dans la gamme $\left(c_0, v_A\right) \leq v_R \leq \left(c_0^2 + v_A^2\right)^{1/2}$. On considère la limite inférieure pour une propagation le long du champ magnétique et la limite supérieure, pour une propagation transversale au champ. On peut noter alors qu'il n'y'a pas de modes magnétosonores avec une vitesse de phase entre le $\min\left(c_0, v_A\right)$ et le $\max\left(c_0, v_A\right)$ et la relation de dispersion (3.22) du mode d'Alfvén montre que ce dernier a une vitesse de phase $v_\varphi \leq v_A$, telle que v_A, caractérise la propagation le long du champ magnétique et elle devient nulle pour une propagation transversale.

3.4 MHD linéaire dans un plasma non homogène

Toutes ces caractéristiques de la propagation des modes dans un milieu illimité et homogène, sont changées lorsque la propagation évolue dans un milieu inhomogène.

Dans un milieu illimité, pour que les perturbations soient finies en $x = y = \pm\infty$, on doit avoir n^2 et l^2 positives, et ainsi m_0^2 doit être négatif. Dans ces conditions, ω^2 doit se trouver dans l'intervalle $\left]k^2 c_T^2, \min\left(k^2 c_0^2, k^2 v_A^2\right)\right[$ pour un mode lent et $\omega^2 > \max\left(k^2 c_0^2, k^2 v_A^2\right)$ correspondant au mode rapide. Mais dans un champ magnétique qui est latéralement limité, aucune de ces conditions n'est réalisée, et ainsi m_0^2 peut être négatif ou positif. Par contre si $m_0^2 < 0$, alors les modes sont les ondes de volume caractérisant spécifiquement l'apparition des ondes magnétosonores d'un milieu illimité.

Si, $m_0^2 > 0$, alors un nouveau mode surgit : un tel mode caractérise une onde de surface, et doit son existence à la discontinuité du champ magnétique. L'amplitude est nulle, sauf dans le voisignage des régions où $\vec{B}$ change. Par conséquent, les ondes de surface magnétosonores peuvent surgir dans une atmosphère structurée. Ces ondes sont d'un intérêt évident, compte tenu de leur rôle possible dans le chauffage de la couronne [20], [49].

3.4.1 Ondes sur une surface de discontinuité magnétique

Afin d'analyser la propagation des ondes sur une surface de discontinuité magnétique, on envisage, un milieu stratifié plan parallèle, telle que celui-ci est vertical. On suppose alors que toute les grandeurs dépendent de la variable x dirigée horizontalement et un champ magnétique $\vec{B}_0$ parallèle à $\vec{e}_z$, mais non uniforme.

A l'équilibre on a : $\rho_0 = \rho_0(x)$, $p_0 = p_0(x)$, $T_0 = T_0(x)$, $\vec{B}_0 = B_0(x)\vec{e}_z$ et la condition d'équilibre de la pression totale (gaz + magnétique) s'exprime comme suit :

$$\frac{d}{dx}\left(p_0(x) + \frac{B_0^2(x)}{2\mu}\right) = 0 \tag{3.30}$$

Dans ces conditions, les équations associées à la perturbation peuvent se ramener à la forme :

$$\frac{d}{dx}\frac{\varepsilon(x)}{\eta^2(x)}\frac{d\psi}{dx} - \varepsilon(x)\psi(x) = 0 \tag{3.31}$$

où, selon les auteurs, la grandeur ψ est reliée à la vitesse transversale [49] : $\hat{v}_x$.

Dans la suite, on se propose d'établir cette importante équation de la perturbation à partir des équations générales du mouvement.

Ainsi, on part du systéme d'équations suivant :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho_0 \vec{v}\right) = 0, \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \vec{\nabla}\Lambda\left(\vec{v}\Lambda\vec{B}_0\right), \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)p_0 = c_0^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\rho_0\right), \tag{3.34}$$

$$\rho_0(x)\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla}p + \frac{\left(\vec{\nabla}\Lambda\vec{B}_0\right)\Lambda\vec{b}}{\mu} + \frac{\left(\vec{\nabla}\Lambda\vec{b}\right)\Lambda\vec{B}_0}{\mu}, \tag{3.35}$$

où ρ, p, $\vec{v}$, et $\vec{b}$ (satisfaisant $div\vec{b} = 0$) sont respectivement les perturbations de densité, pression, vitesse et de champ d'induction. La vitesse sonore à l'état initial est $c_0(x) = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}$, avec γ qui désigne le rapport des deux chaleurs spécifiques.

Sachant que le produit vectoriel n'est pas commutatif et selon l'identité vectorielle générale, on a la propriété suivante :

$$\vec{\nabla}\left(\vec{b}\cdot\vec{B}_0\right)=\left(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}_0+\left(\vec{B}_0\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{b}+\vec{b}\Lambda\left(\vec{\nabla}\Lambda\vec{B}_0\right)+\vec{B}_0\Lambda\left(\vec{\nabla}\Lambda\vec{b}\right). \tag{3.36}$$

On peut faire apparaitre dans l'équation des petits mouvements, la pression totale perturbée :

$$p_T=p+\frac{B_0}{\mu}b_z. \tag{3.37}$$

En effet, la formule générale (3.36) donne le 3^{em} terme de (3.35), qui devient en remplaçant et compte tenu d'une simplification qui élimine $\dfrac{\left(\vec{\nabla}\Lambda\vec{B}_0\right)\Lambda\vec{b}}{\mu}$:

$$\rho_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\left(p+\frac{\vec{b}\cdot\vec{B}_0}{\mu}\right)+\frac{\left(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}_0}{\mu}+\frac{\left(\vec{B}_0\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{b}}{\mu}. \tag{3.38}$$

Ensuite on peut développer $\vec{b}$ selon (3.33) et p selon (3.34). De plus, introduisons les notations suivantes :

$$\Delta=div\vec{v},\quad \Gamma=\frac{\partial v_z}{\partial z},\quad p_T=p+\frac{B_0}{\mu}b_z, \tag{3.39}$$

avec $v=\left(v_x,v_y,v_z\right)$, et $b=\left(b_x,b_y,b_z\right)$ comme suit :

$$\frac{\partial b_x}{\partial t}=B_0\frac{\partial v_x}{\partial z},\quad \frac{\partial b_y}{\partial t}=B_0\frac{\partial v_y}{\partial z},\quad \frac{\partial b_z}{\partial t}=B_0\left(\Gamma-\Delta\right)-\left(\frac{dB_0}{dx}\right)v_x, \tag{3.40}$$

et:

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\rho_0c_0^2\Delta-\left(\frac{dp_0}{dx}\right)v_x,\quad \frac{\partial p_T}{\partial t}=\rho_0v_A^2\Gamma-\rho_0\left(c_0^2+v_A^2\right)\Delta. \tag{3.41}$$

Partant de l'équation précedente (3.38), on projete celle-ci dans les trois directions x, y et z, respectivement, on obtient les composantes de l'équation de quantité de mouvement comme suit :

$$\begin{cases}\rho_0\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-v_A^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_x=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\left(c_0^2+v_A^2\right)\Delta-\rho_0v_A^2\Gamma\right),\\ \rho_0\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-v_A^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_y=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\left(c_0^2+v_A^2\right)\Delta-\rho_0v_A^2\Gamma\right),\\ \dfrac{\partial^2v_z}{\partial t^2}=c_0^2\dfrac{\partial\Delta}{\partial z}.\end{cases} \tag{3.42}$$

A ce stade, le système d'équations différentielles est un système linéaire à coefficients constants qui peut être résolu par une décomposition en mode de Fourier de la forme $v_x = \hat{v}_x\left(x\right)e^{i\left(ly+kz-\omega t\right)}$, $p = \hat{p}\left(x\right)e^{i\left(ly+kz-\omega t\right)}$, etc., limité au mode fondamental de la perturbation.

On pose la notation chapeau pour indiquer la partie liée aux amplitudes des perturbations qui dépendent de la variable x.

Dans ces conditions, après quelques calculs algébriques le système d'équations peut être réduit à une simple équation différentielle ordinaire en $\hat{v}_x\left(x\right)$, en éliminanat $\hat{v}_y$ et $\hat{v}_z$ en fonction de $\hat{v}_x$. De plus, on tire les expressions suivantes :

$$\Delta = div\vec{v} = \left(\frac{d\hat{v}_x\left(x\right)}{dx} + \left(il\right)\hat{v}_y\left(x\right) + \left(ik\right)\hat{v}_z\left(x\right)\right)e^{i\left(ly+kz-\omega t\right)}, \tag{3.43}$$

et

$$\Gamma = \frac{\partial v_z}{\partial z} = \left(ik\right)\hat{v}_z\left(x\right)e^{i\left(ly+kz-\omega t\right)}. \tag{3.44}$$

Les deux dernières équations de (3.42) conduisent au système suivant :

$$\begin{cases} \left[\left(k^2v_A^2 - \omega^2\right) + l^2\left(c_0^2 + v_A^2\right)\right]\hat{v}_y\left(x\right) + \left(c_0^2kl\right)\hat{v}_z\left(x\right) = \left(il\right)\left(c_0^2 + v_A^2\right)\dfrac{d\hat{v}_x}{dx}, \\ \left(klc_0^2\right)\hat{v}_y\left(x\right) + \left(k^2c_0^2 - \omega^2\right)\hat{v}_z\left(x\right) = \left(ikc_0^2\right)\dfrac{d\hat{v}_x}{dx}, \end{cases} \tag{3.45}$$

dont la solution est :

$$\left.\begin{aligned} \hat{v}_y\left(x\right) &= \frac{il\left[k^2c_0^4 - \left(k^2c_0^2 - \omega^2\right)\left(c_0^2 + v_A^2\right)\right]\dfrac{d\hat{v}_x}{dx}}{l^2\left[k^2c_0^4 - \left(k^2c_0^2 - \omega^2\right)\left(c_0^2 + v_A^2\right)\right] - \left[\left(k^2c_0^2 - \omega^2\right)\left(k^2v_A^2 - \omega^2\right)\right]}, \\ \hat{v}_z\left(x\right) &= \frac{-\left(ikc_0^2\right)\left(k^2v_A^2 - \omega^2\right)\dfrac{d\hat{v}_x}{dx}}{l^2\left[k^2c_0^4 - \left(k^2c_0^2 - \omega^2\right)\left(c_0^2 + v_A^2\right)\right] - \left[\left(k^2c_0^2 - \omega^2\right)\left(k^2v_A^2 - \omega^2\right)\right]}, \\ \text{determinant} &= k^2l^2c_0^4 - \left(k^2c_0^2 - \omega^2\right)\left[l^2\left(c_0^2 + v_A^2\right) + \left(k^2v_A^2 - \omega^2\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3.46}$$

Reportant (3.46) dans la première équation de (3.42), on obtient alors :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\rho_0\left(x\right)\left(k^2v_A^2\left(x\right)-\omega^2\right)\left[k^2c_0^4\left(x\right)-\left(c_0^2\left(x\right)+v_A^2\left(x\right)\right)\left(k^2c_0^2\left(x\right)-\omega^2\right)\right]\cdot\frac{d\hat{v}_x\left(x\right)}{dx}}{l^2k^2c_0^4\left(x\right)-\left(k^2c_0^2\left(x\right)-\omega^2\right)\left(l^2\left(c_0^2\left(x\right)+v_A^2\left(x\right)\right)+\left(k^2v_A^2\left(x\right)-\omega^2\right)\right)}\right) \tag{3.47}$$
$$-\rho_0\left(x\right)\left(k^2v_A^2\left(x\right)-\omega^2\right)\hat{v}_x\left(x\right)=0,$$

Equation qu'on tente de ramener à la forme donnée en (3.31). On peut expliciter cette équation en utilisant le dénominateur c'est-à-dire le déterminant pour isoler le terme en l^2 :

$$\text{determinant}=-l^2\left(k^2\left(\frac{c_0^2\left(x\right)v_A^2\left(x\right)}{\left(c_0^2\left(x\right)+v_A^2\left(x\right)\right)}\right)-\omega^2\right)\left(c_0^2\left(x\right)+v_A^2\left(x\right)\right)-\left(k^2c_0^2\left(x\right)-\omega^2\right)\left(k^2v_A^2\left(x\right)-\omega^2\right)$$
$$\text{determinant}=-l^2\left(k^2c_T^2\left(x\right)-\omega^2\right)\left(c_0^2\left(x\right)+v_A^2\left(x\right)\right)-\left(k^2c_0^2\left(x\right)-\omega^2\right)\left(k^2v_A^2\left(x\right)-\omega^2\right)$$
$$\text{determinant}=-\left(k^2c_T^2\left(x\right)-\omega^2\right)\left(c_0^2\left(x\right)+v_A^2\left(x\right)\right)\left(l^2+\frac{\left(k^2c_0^2\left(x\right)-\omega^2\right)\left(k^2v_A^2\left(x\right)-\omega^2\right)}{\left(k^2c_T^2\left(x\right)-\omega^2\right)\left(c_0^2\left(x\right)+v_A^2\left(x\right)\right)}\right)$$
$$\text{determinant}=-\left(k^2c_T^2\left(x\right)-\omega^2\right)\left(c_0^2\left(x\right)+v_A^2\left(x\right)\right)\left(l^2+m_0^2\left(\omega,k,x\right)\right),$$
$$\text{avec}\ \ c_T^2\left(x\right)=\frac{c_0^2\left(x\right)v_A^2\left(x\right)}{c_0^2\left(x\right)+v_A^2\left(x\right)}\ \ \text{et}\ \ m_0^2\left(\omega,k,x\right)=\frac{\left(k^2c_0^2\left(x\right)-\omega^2\right)\left(k^2v_A^2\left(x\right)-\omega^2\right)}{\left(k^2c_T^2\left(x\right)-\omega^2\right)\left(c_0^2\left(x\right)+v_A^2\left(x\right)\right)}.$$

Finalement, le déterminant se réduit à l'expression suivante :

$$\text{determinant}=-\left(k^2c_T^2\left(x\right)-\omega^2\right)\left(c_0^2\left(x\right)+v_A^2\left(x\right)\right)\left(l^2+m_0^2\left(\omega,k,x\right)\right). \tag{3.48}$$

Dans ces conditions, on établit la relation suivante :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\rho_0\left(x\right)\left(k^2v_A^2\left(x\right)-\omega^2\right)\left(k^2c_0^4\left(x\right)-k^2c_0^2\left(x\right)\left(c_0^2\left(x\right)+v_A^2\left(x\right)\right)+\omega^2\left(c_0^2\left(x\right)+v_A^2\left(x\right)\right)\right)}{-\left(\left(k^2c_T^2\left(x\right)-\omega^2\right)\left(c_0^2\left(x\right)+v_A^2\left(x\right)\right)\left(l^2+m_0^2\left(\omega,k,x\right)\right)\right)}\frac{d\hat{v}_x\left(x\right)}{dx}\right)$$
$$-\rho_0\left(x\right)\left(k^2v_A^2\left(x\right)-\omega^2\right)\hat{v}_x\left(x\right)=0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\rho_0\left(x\right)\left(k^2v_A^2\left(x\right)-\omega^2\right)\left(k^2c_0^4\left(x\right)-k^2c_0^4\left(x\right)-k^2c_0^2\left(x\right)v_A^2\left(x\right)+\omega^2\left(c_0^2\left(x\right)+v_A^2\left(x\right)\right)\right)}{-\left(\left(k^2c_T^2\left(x\right)-\omega^2\right)\left(c_0^2\left(x\right)+v_A^2\left(x\right)\right)\left(l^2+m_0^2\left(\omega,k,x\right)\right)\right)}\frac{d\hat{v}_x\left(x\right)}{dx}\right)$$
$$-\rho_0\left(x\right)\left(k^2v_A^2\left(x\right)-\omega^2\right)\hat{v}_x\left(x\right)=0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-\rho_0\left(x\right)\left(k^2v_A^2\left(x\right)-\omega^2\right)\left(k^2c_T^2\left(x\right)-\omega^2\right)\left(c_0^2\left(x\right)+v_A^2\left(x\right)\right)}{-\left(\left(k^2c_T^2\left(x\right)-\omega^2\right)\left(c_0^2\left(x\right)+v_A^2\left(x\right)\right)\left(l^2+m_0^2\left(\omega,k,x\right)\right)\right)}\frac{d\hat{v}_x\left(x\right)}{dx}\right) \tag{3.49}$$
$$-\rho_0\left(x\right)\left(k^2v_A^2\left(x\right)-\omega^2\right)\hat{v}_x\left(x\right)=0$$

La relation (3.49) devient :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\rho_0\left(x\right)\left(k^2v_A^2\left(x\right)-\omega^2\right)}{\left(l^2+m_0^2\left(\omega,k,x\right)\right)}\frac{d\hat{v}_x\left(x\right)}{dx}\right]-\rho_0\left(x\right)\left(k^2v_A^2\left(x\right)-\omega^2\right)\hat{v}_x\left(x\right)=0, \tag{3.50}$$

où la fonction $m_0^2\left(\omega,k,x\right)$est définie grace aux relations (3.17) et (3.18), lié à un mode MHD dans un milieu uniforme.

Plus clairement, on aurait pour un mode MHD en $e^{i\left(nx+ly+k_{\|}z\right)}$ dans un hypothétique milieu uniforme ayant les caractéristiques locales :

$$n^2+l^2+m_0^2$$

On peut donc dire que la quantité au dénominateur représente $-n^2\left(x\right)$où $n\left(x\right)$, serait la composante x du vecteur d'onde d'une onde MHD ayant pour autres composantes de $\vec{k}$, $k_{\|}$ et l et pour fréquence ω. On peut donc réécrire :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\rho_0\left(x\right)\left(k^2v_A^2\left(x\right)-\omega^2\right)}{-n^2\left(x\right)}\frac{d\hat{v}_x}{dx}\right)-\rho_0\left(x\right)\left(k^2v_A^2\left(x\right)-\omega^2\right)\hat{v}_x=0, \tag{3.51}$$

$n^2\left(x\right)$ étant une fonction définie par l'équation (3.17) ou (3.18).

Avant d'étudier la relation (3.51), il est noté que dans un milieu uniforme on admet que les quantités physiques $\rho_0, c_0, v_A, c_{T,}$ *et* m_0^2 sont toutes constantes, l'équation (3.51) devient :

$$\left(k^2v_A^2-\omega^2\right)\left(\frac{d^2\hat{v}_x}{dx^2}-\left(m_0^2+l^2\right)\hat{v}_x\right)=0, \tag{3.52}$$

Dés lors, il y'a deux possibilités (pour $l\neq 0$): soit $\omega^2=k^2v_A^2$, avec $\hat{v}_x\left(x\right)$arbitraire; ou $\omega^2\neq k^2v_A^2$, et $\hat{v}_x\left(x\right)$ satisfait à la suivante :

$$\frac{d^2\hat{v}_x}{dx^2}-\left(m_0^2+l^2\right)\hat{v}_x=0. \tag{3.53}$$

En effet, si le milieu est uniforme et illimité, (3.52) a des solutions sous la forme e^{inx}, pourvu que :

$$\left(k^2v_A^2-\omega^2\right)\left(l^2+n^2+m_0^2\right)=0,$$

on retrouve alors le mode d'Alfvén $\left(\omega^2=k^2v_A^2\right)$ et les modes magnétosonores lents et rapides (équation(3.18)).

Dans l'étude des ondes de surface, comme déjà mentionné ci-dessus, n est en fait imaginaire, ce qui conduit à poser les conditions suivantes :

$$l^2 + m_0^2\left(\omega, k\right) = -n^2\left(x\right),$$
$$l^2 + m_0^2\left(\omega, k\right) = +q^2\left(x\right).$$

Avec la seconde relation, on retrouve exactement l'équation (3.31) telle que $\varepsilon\left(x\right) = \rho_0\left(x\right)\left(k^2 v_A^2\left(x\right) - \omega^2\right)$, qui est la forme obtenue dans l'article de Wentzel [49].

Concernant l'équation en $\hat{v}_x$ des perturbations de nombre d'onde parallèle à la stratification $\vec{\kappa} = l\vec{e}_y + k\vec{e}_z$ on a :

$$\frac{d}{dx}\frac{\varepsilon\left(x\right)}{q^2\left(x\right)}\frac{d\hat{v}_x}{dx} = \varepsilon\left(x\right)\hat{v}_x, \tag{3.54}$$

avec $\varepsilon\left(x\right) = \rho_0\left(x\right)\left(k^2 v_A^2\left(x\right) - \omega^2\right)$, $q^2\left(x\right) = l^2 + m_0^2\left(\omega, k, x\right)$,
et $m_0^2\left(\omega, k, x\right) = \dfrac{\left(k^2 c_0^2\left(x\right) - \omega^2\right)\left(k^2 v_A^2\left(x\right) - \omega^2\right)}{\left(c_0^2\left(x\right) + v_A^2\left(x\right)\right)\left(k^2 c_T^2\left(x\right) - \omega^2\right)}$.

Ces équations peuvent être traitées selon diverses approximations. Si l'échelle de gradient est faible, c'est-à-dire $\lambda \ll L_{grad}$, il est possible d'appliquer une méthode WKB qui décrit la propagation à l'approximité de l'optique géométrique d'ondes qui ont par ailleurs toutes les caractéristiques des ondes du milieu homogène. Si, par contre, l'inégalité est inversée $\lambda \gg L_{grad}$, il est possible de tenter une approximation où les variations sur L finie, sont décrite par une discontinuité.

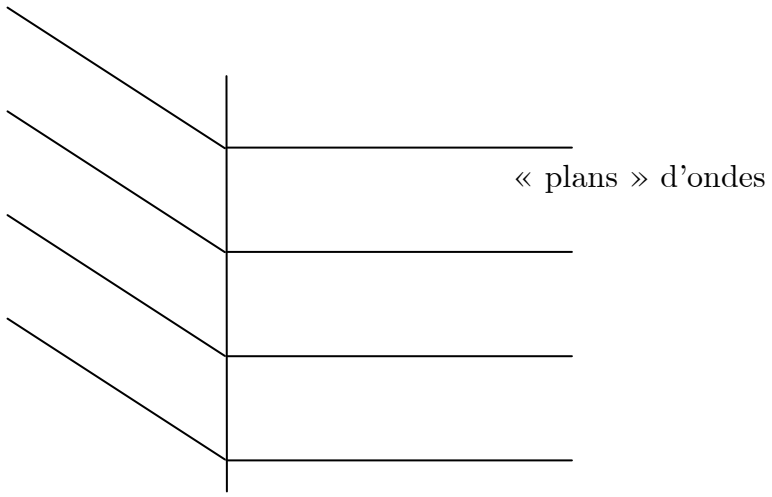

Figure 22 – Schéma qualitatif des plans d'ondes.

Par conséquent résoudre l'équation (3.54) devient un problème relativement simple, puisque dans chaque région les perturbations ont la forme qu'elles ont en milieu homogène dont il suffit de les raccorder. On peut alors distinguer plusieurs cas, selon que la perturbation est propagative ou évanescente dans l'un ou l'autre milieu, qui est conditionée par le signe de q^2 de part et d'autre de la discontinuité (Figure 22). Ainsi pour :

- q^2 négatif des deux cotés. La perturbation est une onde propagative de part et d'autre, (3.54) celle-ci décrit alors une réfraction.
- q^2 négatif d'un coté, positif de l'autre. C'est le problème de la réflexion d'une onde sur une interface.
- q^2 positif des deux cotés. (3.54) décrit alors une structure localisée autour de la discontinuité (Figure 23), et qui est spécifique de la discontinuité représentant le cas décrivant une onde de surface.

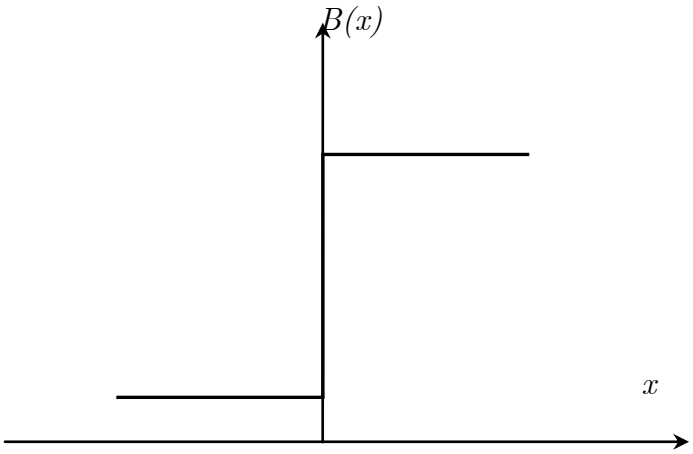

Figure 23 – Schéma qualitatif d'une seule discontinuité.

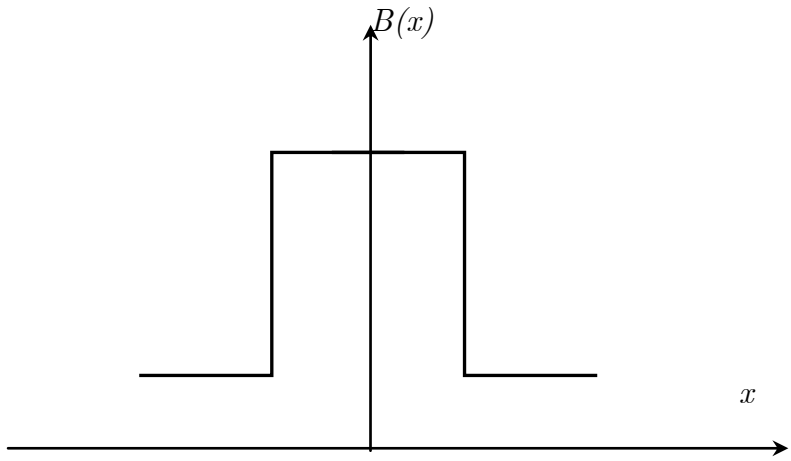

Figure 24 – Schéma qualitatif de deux discontinuités dos à dos.

Jusqu'à présent on a raisonné comme si les variations du milieu pouvaient être schématisées par une seule discontinuité plane. En réalité les choses sont plus compliquées, soit par la géométrie non plane par exemple $\vec{B} = \vec{B}_0$ dans un cylindre et 0 à l'extérieur, soit par le nombre des discontinuités, si elles ne sont pas trop éloignées, que l'on peut shématiser par deux discontinuités dos à dos de type Slab (Figure 24).

En fait on touche à des problèmes importants qui concerne le rôle de la largeur finie des discontinuités, lié à l'équation (3.54). Selon les différentes forme adoptées celle-ci a fait l'objet de plusieurs traveaux s'interessant notamment dans les applications magnétosphériques ainsi que l'étude de son application à la physique solaire et, en particulier, dans le chauffage des boucles coronales [20].

Ainsi, (3.54) décrit la nature tridimensionnelle, des perturbations isentropiques dans un milieu non uniforme (en x) et compressible. La nature de sa solution, dans le cas spécial d'une discontinuité plane unique, a été considérée [37]. Autres cas, comme le tube isolé ou le Slab, ont été aussi étudiés (voir, [36], [39]).

Pour une future référence, il est utile de rappeler que pour un mouvement tridimensionnel $\hat{v}_y$ et $\dfrac{d\hat{v}_x}{dx}$ sont reliés (voir (3.46)) par :

$$\hat{v}_y\left(x\right) = \frac{il\dfrac{d\hat{v}_x}{dx}}{\left(l^2 + m_0^2\left(\omega, k, x\right)\right)}, \tag{3.55}$$

$$\hat{v}_z\left(x\right)=\frac{ikc_0^2\left(x\right)\left(k^2v_A^2\left(x\right)-\omega^2\right)\frac{d\hat{v}_x}{dx}}{\left(k^2c_T^2\left(x\right)-\omega^2\right)\left(c_0^2\left(x\right)+v_A^2\left(x\right)\right)\left(l^2+m_0^2\left(\omega,k,x\right)\right)},\tag{3.56}$$

Aussi, l'amplitude de la pression totale perturbée (voir (3.41)), peut être développée en fonction de $\frac{d\hat{v}_x}{dx}$. Pour cela, on calcule l'expression de p_T en se servant de (3.55), et (3.56). De plus, compte tenu de (3.43), (3.44) et de $p_T\left(x\right)=\hat{p}_T\left(x\right)e^{i\left(ly+kz-\omega t\right)}$ l'expression (3.41) de la pression totale permet d'établir :

$$\begin{aligned}-\left(i\left(\omega\right)\right)\hat{p}_T\left(x\right)=&-\left(\frac{\rho_0k^2v_A^2c_0^2\left(k^2v_A^2-\left(\omega\right)^2\right)}{\left(k^2c_T^2-\left(\omega\right)^2\right)\left(c_0^2+v_A^2\right)\left(l^2+m_0^2\right)}\right)\frac{d\hat{v}_x}{dx}\\&-\rho_0\left(c_0^2+v_A^2\right)\left[\frac{d\hat{v}_x}{dx}-\left(\frac{l^2}{l^2+m_0^2}\right)\frac{d\hat{v}_x}{dx}-\left(\frac{k^2c_0^2\left(k^2v_A^2-\left(\omega\right)^2\right)}{\left(k^2c_T^2-\left(\omega\right)^2\right)\left(c_0^2+v_A^2\right)\left(l^2+m_0^2\right)}\right)\frac{d\hat{v}_x}{dx}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\left(i\left(\omega\right)\right)\hat{p}_T\left(x\right)=&-\left(\frac{\rho_0k^2v_A^2c_0^2\left(k^2v_A^2-\left(\omega\right)^2\right)}{\left(k^2c_T^2-\left(\omega\right)^2\right)\left(c_0^2+v_A^2\right)\left(l^2+m_0^2\right)}\right)\frac{d\hat{v}_x}{dx}\\&+\left[\begin{aligned}&-\left(\rho_0\left(c_0^2+v_A^2\right)\right)\frac{d\hat{v}_x}{dx}+\left(\frac{\rho_0l^2\left(c_0^2+v_A^2\right)}{\left(l^2+m_0^2\right)}\right)\frac{d\hat{v}_x}{dx}\\&+\left(\frac{\rho_0k^2c_0^2\left(c_0^2+v_A^2\right)\left(k^2v_A^2-\left(\omega\right)^2\right)}{\left(k^2c_T^2-\left(\omega\right)^2\right)\left(c_0^2+v_A^2\right)\left(l^2+m_0^2\right)}\right)\frac{d\hat{v}_x}{dx}\end{aligned}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\left(i\left(\omega\right)\right)\hat{p}_T\left(x\right)=&-\left(\rho_0\left(c_0^2+v_A^2\right)\right)\frac{d\hat{v}_x}{dx}+\frac{\rho_0l^2\left(c_0^2+v_A^2\right)}{\left(l^2+m_0^2\right)}\frac{d\hat{v}_x}{dx}\\&+\left(\frac{\rho_0k^2c_0^4\left(k^2v_A^2-\left(\omega\right)^2\right)}{\left(k^2c_T^2-\left(\omega\right)^2\right)\left(c_0^2+v_A^2\right)\left(l^2+m_0^2\right)}\right)\frac{d\hat{v}_x}{dx},\end{aligned}$$

$$-\left(i\left(\omega\right)\right)\hat{p}_T\left(x\right)=\frac{-\rho_0\left(c_0^2+v_A^2\right)^2\left(k^2c_T^2-\left(\omega\right)^2\right)m_0^2+\rho_0k^2c_0^4\left(k^2v_A^2-\left(\omega\right)^2\right)}{\left(k^2c_T^2-\left(\omega\right)^2\right)\left(c_0^2+v_A^2\right)\left(l^2+m_0^2\right)}\frac{d\hat{v}_x}{dx},$$

$$-\left(i\left(\omega\right)\right)\hat{p}_T\left(x\right)=\frac{-\rho_0\left(c_0^2+v_A^2\right)\left(k^2c_0^2-\left(\omega\right)^2\right)\left(k^2v_A^2-\left(\omega\right)^2\right)+\rho_0k^2c_0^4\left(k^2v_A^2-\left(\omega\right)^2\right)}{\left(k^2c_T^2-\left(\omega\right)^2\right)\left(c_0^2+v_{A0}^2\right)\left(l^2+m_0^2\right)}\frac{d\hat{v}_x}{dx},$$

$$-\left(i\left(\omega\right)\right)\hat{p}_T\left(x\right)=\frac{\rho_0\left(k^2v_{A0}^2-\left(\omega\right)^2\right)\left[-\left(c_0^2+v_A^2\right)\left(k^2c_0^2-\left(\omega\right)^2\right)+k^2c_r^4\right]}{\left(k^2c_T^2-\left(\omega\right)^2\right)\left(c_0^2+v_A^2\right)\left(l^2+m_0^2\right)}\frac{d\hat{v}_x}{dx},$$

$$-\left(i\left(\omega\right)\right)\hat{p}_T\left(x\right)=\frac{\rho_0\left(k^2v_A^2-\left(\omega\right)^2\right)\left[-\left(k^2c_0^4-\left(\omega\right)^2c_0^2+k^2c_0^2v_A^2-\left(\omega\right)^2v_A^2\right)+k^2c_r^4\right]}{\left(k^2c_T^2-\left(\omega\right)^2\right)\left(c_0^2+v_A^2\right)\left(l^2+m_0^2\right)}\frac{d\hat{v}_x}{dx},$$

$$-\left(i\left(\omega\right)\right)\hat{p}_T\left(x\right)=\frac{\rho_0\left(k^2v_A^2-\left(\omega\right)^2\right)\left[\left(\omega\right)^2\left(c_0^2+v_A^2\right)-k^2c_0^2v_A^2\right]}{\left(k^2c_T^2-\left(\omega\right)^2\right)\left(c_0^2+v_A^2\right)\left(l^2+m_0^2\right)}\frac{d\hat{v}_x}{dx},$$

où $c_T^2\left(x\right)=\dfrac{c_0^2\left(x\right)v_A^2\left(x\right)}{\left(c_0^2\left(x\right)+v_A^2\left(x\right)\right)}$,

$$-\left(i\left(\omega\right)\right)\hat{p}_T\left(x\right)=\frac{-\rho_0\left(k^2v_A^2-\left(\omega\right)^2\right)\left(c_0^2+v_A^2\right)\left(k^2c_T^2-\left(\omega\right)^2\right)}{\left(k^2c_T^2-\left(\omega\right)^2\right)\left(c_0^2+v_A^2\right)\left(l^2+m_0^2\left(\omega,k,x\right)\right)}\frac{d\hat{v}_x}{dx},$$

$$-\left(i\left(\omega\right)\right)\hat{p}_T\left(x\right)=-\frac{\rho_0\left(k^2v_A^2-\left(\omega\right)^2\right)}{\left(l^2+m_0^2\left(\omega,k,x\right)\right)}\frac{d\hat{v}_x}{dx},\tag{3.57}$$

pour aboutir à la relation suivante:

$$\hat{p}_T\left(x\right)=-\left(\frac{i}{\omega}\right)\frac{\rho_0\left(x\right)\left(k^2v_A^2\left(x\right)-\omega^2\right)}{\left(l^2+m_0^2\left(\omega,k,x\right)\right)}\frac{d\hat{v}_x}{dx},\tag{3.58}$$

Pour établir la relation de dispersion, il faut examiner explicitement les valeurs correspondantes à k et l données, pour savoir dans quelle mesure on peut trouver des solutions non triviales de (3.54) pour ω qui représente la résolvante du problème des ondes hydromagnétiques, en milieu inhomogène stratifié.

Dans la suite, on s'intéresse uniquement au comportement des modes dans un milieu où la non-uniformité prend la forme d'une seule interface plane, compatible avec la réalité des ondes de surface (voir, [37] et [49]).

Ces ondes de surface, existent aussi dans un Slab ou un tube isolé, ainsi que les ondes de volumes, ont été étudiées (voir, [1], [36], [38] et [39]).

3.4.2 Ondes MHD de surface sur une discontinuité plane

Il s'agit dans ce cas de résoudre l'équation (3.54), avec k et l connus et ω inconnu. On admet que $\rho_0(x)$, $c_0^2(x)$,...,$v_A^2(x)$, etc. sont supposées constants avec des valeurs différentes de part et d'autre de l'interface (indice 2 et 1 respectivement).

L'état de base du plasma est justement décrit par cette variation discontinue du champ magnétique, de sorte que :

$$B_0(x) = \begin{cases} B_2, & x > 0, \\ B_1, & x < 0, \end{cases} \tag{3.59}$$

avec B_1 et B_2 ayant des valeurs constantes (Figure 25).

En raison de la continuité de la pression (équation (3.30)), les deux cotés de l'interface en $x = 0$ sont reliés par la condition suivante :

$$p_2 + \frac{B_2^2}{2\mu} = p_1 + \frac{B_0^2}{2\mu}. \tag{3.60}$$

Suite à la condition de l'existence des ondes de surface présentée au dessus, on cherche des solutions pour lesquelles $\left(l^2 + m_1^2\right)$ et $\left(l^2 + m_2^2\right)$ sont tous les deux positifs.

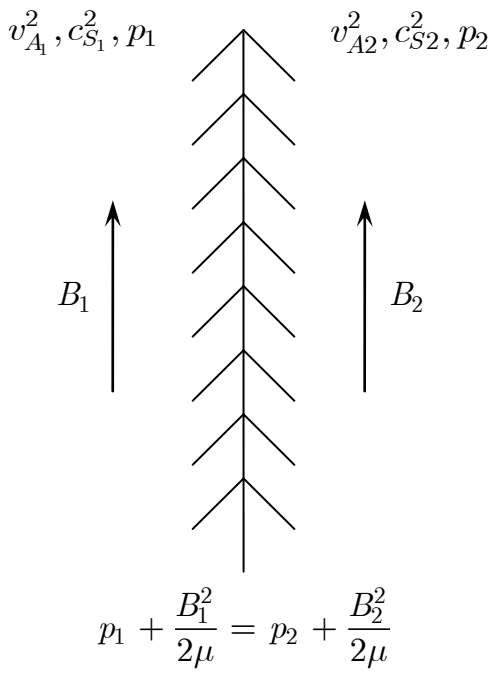

Figure 25 – Shématisation de l'état de base du plasma.

On recherche alors des solutions de (3.54) pour lesquelles q_1^2 et q_2^2 sont positifs, correspondant au domaine positif en $x > 0$, pour $\hat{v}_x\left(x\right)$. Posons alors :

$$\hat{v}_x\left(x\right) = \begin{cases} \alpha_2 e^{-\left(m_2^2+l^2\right)^{1/2}x}, & x > 0, \\ \alpha_1 e^{\left(m_1^2+l^2\right)^{1/2}x}, & x < 0, \end{cases} \tag{3.61}$$

avec $\left(m_1^2 + l^2\right)^{1/2} > 0$, et $\left(m_2^2 + l^2\right)^{1/2} > 0$. En écrivant (3.61), la condition que l'amplitude $\hat{v}_x$ tend vers zéro pour $x = \pm\infty$ a été imposée. Nous excluons de ce fait, la propagation des ondes latérale assurant seulement l'existence des ondes de surface.

A travers l'interface $x = 0$, le mode doit satisfaire à des conditions de raccord, telle que $\hat{v}_x\left(x\right)$ et $\hat{p}_T\left(x\right)$ doivent être continues, conduisant à établir la relation de dispersion.

Ainsi, pour $\alpha_1 = \alpha_2$ on assure la continuité de $\hat{p}_T$ (3.58) en $x = 0$ permettant de trouver :

$$\rho_1\left(k^2 v_{A1}^2 - \omega^2\right)\left(m_2^2 + l^2\right)^{1/2} + \rho_2\left(k^2 v_{A2}^2 - \omega^2\right)\left(m_1^2 + l^2\right)^{1/2} = 0, \tag{3.62}$$

relation valable si pour $\left(m_1^2 + l^2\right)^{1/2}$ et $\left(m_2^2 + l^2\right)^{1/2}$ tous les deux positifs.

On a écrit :

$$m_r^2 = \frac{\left(k^2 c_r^2 - \omega^2\right)\left(k^2 v_{Ar}^2 - \omega^2\right)}{k^2 c_r^2 v_{Ar}^2 - \left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right)\omega^2}, \quad r = \left(1,2\right),$$

où $c_r = \left(\dfrac{\gamma p_r}{\rho_r}\right)^{1/2}$ et $v_{Ar}^2 = \dfrac{B_r}{\left(\mu\rho_r\right)^{1/2}}$ pour $r = \left(1,2\right)$ sont les vitesses sonores et d'Alfvén dans $x < 0$ et $x > 0$, respectivement.

Equation (3.62) est la relation de dispersion des ondes de surface sur une seule interface magnétique. Elle a été aussi obtenue par Roberts [37], et Wentzel [49].

La nature précise des modes qui peuvent se propager dépendera de la géométrie particuliére du champ magnétique que nous étudions, qu'il s'agisse de la frontiére d'une boucle coronale, le bord d'une tache solaire, où un tube de flux intense de la photosphére.

3.5 La problématique de la modélisation de l'instabilité Kelvin-Helmholtz en MHD

Dans le cadre de cette étude, il est développé du point de vue théorique et quantitatif par la résolution numérique, la modélisation de la discontinuité hydromagnétique de Kelvin-Helmholtz au bord de la tache solaire, sous la forme d'une prescription, pour son fort gradient de vitesse et de champ magnétique.

On se propose d'étudier le phénomène d'instabilité K-H engendrée par une discontinuité hydromagnétique entre deux fluides parfaitement conducteurs, non visqueux, compressibles, en mouvement relatif auquel on applique un champ magnétique parallèle et uniforme.

La modélisation de l'instabilité K-H qui résulte de la discontinuité hydromagnétique au bord de la tache solaire se fait dans le cadre de la MHD non résistive, supposée idéale. De plus, on ne tient pas compte dans l'équation du mouvement du terme produisant la diffusion visqueuse, et dans l'équation d'induction, on néglige le terme relatif à la diffusion du champ magnétique. Cette situation est comparable à un comportement caractérisé par les lignes de champs « gelées » dans la matière ce qui signifie qu'elles sont transportées uniquement par le plasma et une évolution similaire à la sienne.

De ce fait, la discontinuité ne diffuse pas où les profils de base V_0, et B_0, que nous considérons, ci-dessous, sont des champs de vitesses et de champs magnétiques avec une seule composante, celle le long de z, mais cette dernière varie uniquement suivant une direction orthogonale x.

L'état de base suivant une interface plate, caractérisé par deux champs de vitesses et deux champs magnétiques différents, uniformes de part et d'autre, représente un cas limite pour lequel tout le cisaillement est situé à l'interface où se produit le saut de vitesse du fluide non perturbé et du champ magnétique. Cette configuration d'écoulement de base est illustrée par une forme de nappe de vorticité-courant caractéristique de ce mouvement.

L'équation de mouvement, de conservation de la masse, d'induction, et l'équation d'énergie suffisent, en principe à déterminer le champ de vitesse, de pression, et le champ magnétique. Sous réserve des vérifications liées aux conditions aux limites auxquelles obéissent les grandeurs précedémment citées.

En plus de cet écoulement cisaillé, plusieurs mécanismes interviennent comme la tension superficielle, le champ magnétique, et la gravité.

Une discontinuité de la densité existe lorsque deux fluides non miscibles, sont séparés par une interface plate à l'état de base, de sorte que, la tension superficielle caractérisant leur interaction, n'intervient pas explicitement, initialement la tension superficielle est liée à une courbure de l'interface.

Aussi, dans le but de simplifier l'étude de la stabilité de cette couche de mélange à profil de vitesse, et de champ magnétique continu, on a négligé l'effet de la gravité.

Ceci explique la condition dynamique que l'on doit imposer à l'interface qui est caractérisée par une évolution qui n'est pas connue à l'avance. On admet seulement qu'elle vérifie la continuité de la pression totale à travers la nappe de vortex-courant et que l'instabilité de Kelvin-Helmholtz est abordée dans l'approximation sans effet de gravité et de tension superficielle.

De plus, à l'interface fluide-fluide, liée à la nappe de vorticité-courant, on introduit une condition purement cinématique qui assure que la composante de vitesse normale à la surface de séparation est continue à travers la surface de séparation. En effet, on admet que l'interface se déplace à la même vitesse que les éléments de fluide placés à son contact du fait que ceux-ci ne décollent pas de la surface et ne s'interpénètrent pas.

Dans le cadre d'une théorie linéaire, on peut s'appuyer sur la forme d'une instabilité interfaciale en évolution en fonction de l'espace et du temps tel que $x = \zeta\left(z,t\right)$. Cependant au-delà d'une certaine amplitude non négligeable, cette hypothèse est prise en défaut.

L'étude théorique et numérique de l'instabilité dite à une amplitude infinitésimale , en particulier, celle d'une seule interface plane, séparant le milieu dont l'écoulement de base est en équilibre magnétohydrostatique, l'intérieur de la tache, du milieu dont l'écoulement de base est en équilibre magnétohydrodynamique, la photosphère ; appelée aussi instabilité linéaire hydromagnétique de Kelvin-Helmholtz, a compris un développement analytique qui détermine les paramètres fondamentaux gouvernant la déstabilisation de la structure magnétique du bord d'une tache solaire, suivis d'une analyse des données et d'un diagramme illustrant l'instabilité de ce bord issus des travaux numériques. Ceux-ci ont permis d'aboutir à des résultats concluants quand aux seuils de stabilité.

3.5.1 Formulation des équations de l'instabilité K-H

On considère un plasma compressible, non visqueux, parfaitement conducteur, occupant la totalité de l'espace et en l'absence de la gravité. En outre, on admet l'approximation d'une atmosphère plan-parallèle qui est imprégnée par un champ

magnétique non homogène, $\vec{B}_0 = B_0(x)\vec{e}_z$. La vitesse, la pression, et la densité du plasma sont indiquées respectivement, par : $\vec{V}_0(x)\vec{e}_z, P_0(x), \quad \rho_0(x)$. En qui la situation d'équilibre stable est caractérisée par :

$$\vec{B}_0,\ \vec{V}_0,\ P_0,\ \rho_0 = \begin{cases} \vec{B}_1,\ \vec{V}_1,\ P_1,\ \rho_1, & x < 0, \\ \vec{B}_2,\ \vec{V}_2,\ P_2,\ \rho_2, & x > 0, \end{cases} \tag{3.63}$$

correspondant à la configuration d'une seule nappe de vorticité-courant, séparant, respectivement, le milieu photosphérique dont l'écoulement de base est en équilibre magnétohydrodynamique avec une vitesse $V_1 \neq 0$ et le milieu de la tache solaire dont l'écoulement de base est en équilibre magnétohydrostatique avec une vitesse $V_2 = 0$, (voir, Figure 16).

Les grandeurs physiques $\vec{B}_1,\ \vec{B}_2,\ \vec{V}_1,\ \vec{V}_2,\ P_1,\ P_2,\ \rho_1,\ \rho_2,$ sont supposées constantes et la continuité de la pression totale lié aux contributions du gaz et du champ magnétique est telle que : $\dfrac{d}{dx}\left(p_0 + \dfrac{B_0^2}{2\mu}\right) = 0,$

A l'équilibre on a la rpopriété suivante :

$$P_1 + \frac{B_1^2}{2\mu} = P_2 + \frac{B_2^2}{2\mu} \quad \text{ou} \quad \rho_1\left(c_1^2 + \frac{\gamma}{2}v_{A1}^2\right) = \rho_2\left(c_2^2 + \frac{\gamma}{2}v_{A2}^2\right), \tag{3.64}$$

avec $v_{Ar} = \dfrac{B_r}{(\mu\rho_r)^{1/2}}$, qui désigne la vitesse d'Alfvén et $c_r = \left(\dfrac{\gamma p_r}{\rho_r}\right)^{1/2}$ indique la vitesse sonore.

On se place dans les conditions de deux écoulements non-perturbés, parallèles et uniformes dans le plan (x,z) qui sont caractérisés par les vitesses V_{0r}, les pressions p_{0r}, les densités ρ_{0r}, et les champs magnétiques B_{0r} (l'indice $r = 1, 2$ se réfère au milieu concerné). De plus si l'on admet que la vitesse v_r est telle que $v_r = (v_{xr}, 0, v_{zr})$, associé à P_r, ρ_r et $b_r = (b_{xr}, 0, b_{zr})$qui représente le champ perturbé correspondant, alors l'écoulement, dans chaque milieu, est sujet à un déséquilibre déclenchant une instabilité initiale localisée à l'interface qui, est gouverné par l'ensemble des équations linéarisées suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll}
\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+V_r\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\vec{b}=B_r\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial z}-B_r\Delta\vec{e}_z, & \text{Equation d'induction linéarisée.}\\
\rho_r\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+V_r\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\vec{v}=-\vec{\nabla}\underbrace{p}_{pression\ du\ gaz} & \\
+\dfrac{1}{\mu}\left(B_r\dfrac{\partial\vec{b}}{\partial z}-\vec{\nabla}\underbrace{\left(\vec{B}_r\cdot\vec{b}\right)}_{pression\ magnétique}\right), & \text{Equation de quant. de mvt. linéarisée.}\\
\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+V_r\dfrac{\partial}{\partial z}\right)p=c_r^2\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+V_r\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\rho, & \text{Equation d'état linéarisée.}\\
\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+V_r\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\rho=-\rho_r\vec{\nabla}\cdot\vec{v}, & \text{Equation de continuité linéarisée.}
\end{array}\right\} \tag{3.65}$$

On travaille sur des équations linéaires, avec des grandeurs d'équilibres uniformes pour chaque milieu r, $\left(r=1,2\right)$ et il est donc possible de chercher des solutions aux équations de l'ensemble (3.65), sous la forme de modes de Fourier temporels et spatiaux, les grandeurs physiques perturbées peuvent alors être écrites :

$$v_x\left(x,z,t\right)=\hat{v}_x^{(r)}\left(x\right)\exp i\left(kz-\omega t\right),\ p\left(x,z,t\right)=\hat{p}_x^{(r)}\exp i\left(kz-\omega t\right),\ \left(r=1,2\right),\text{etc.},$$

où l'amplitude des variables perturbées définie par la notation chapeau dépend de la coordonné x,et supposée être petite, k le nombre d'onde réel et parallèle à la stratification, ω est la pulsation complexe de la perturbation.

L'ensemble des équations (3.65) est réduit à une seule équation différentielle portant sur l'amplitude de la vitesse perturbée $\hat{v}_x^{(r)}$, pour la région r, où $\left(r=1,2\right)$:

$$\frac{d^2\hat{v}_x^{\ r}\left(x\right)}{dx^2}-m_r^2\ \hat{v}_x^{\ r}\left(x\right)=0, \tag{3.66}$$

où l'on a posé m_r tel que :

$$m_r^2\left(\omega,k,x\right)=\frac{\left(k^2v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(k^2c_r^2-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)}{\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)\left(k^2c_{Tr}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)}, \tag{3.67}$$

avec $c_{Tr}^2=\dfrac{c_r^2\left(x\right)v_{Ar}^2\left(x\right)}{\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)}$ la vitesse du tube ou cups.

3.5.1.1 Conditions aux limites

Au niveau de la nappe vortex-courant, la composante normale de la vitesse est continue [40]. Pour traduire le saut à travers la nappe, on adopte la notation suivante :

$$\left[\frac{v_x^{(r)}(x)}{(\omega - V_r k)}\right]_1^2 = 0. \tag{3.68}$$

La pression totale comprenant la contribution de l'état du gaz et du champ magnétque doit également être continue à travers la nappe de vortex-courant en $x = 0$ [40] :

$$\left[\frac{\rho_r\left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right)\left(c_{Tr}^2 - q_r^2\right)}{\left(c_r^2 - q_r^2\right)q_r}\frac{d\hat{v}_x^{(r)}}{dx}\right]_1^2 = 0. \tag{3.69}$$

Par ailleurs, on admet que les solutions de (3.66) pour $\hat{v}_x^{(r)}(x)$ sont supposées être satisfaites à l'infinie.

3.5.2 Analyse de la stabilité

Sur l'infinité de configurations MHD simples, potentiellement envisageable (i.e. vérifiant les équations de la MHD) peu, correspondent à des régimes de paramètres qui les rendent effectivement viables. Pour la majorité d'entre eux, les conditions physiques les caractérisant sont telles que ces configurations ne peuvent exister. La raison de cela réside dans l'instabilité inhérente de ces structures ou flots MHD, c'est-à-dire dans leur incapacité à supporter les petites fluctuations qui prennent nécessairement naissance en leur sein. L'étude de la stabilité des plasmas MHD consiste justement à établir les cadres dans lesquels un plasma est stable ou instable vis-à-vis de ces perturbations, propres à tout système physique.

Dans cette thèse, nous allons analyser la stabilité MHD d'une des structures photosphériques, à savoir le bord de la tache solaire représentant bien sur une frontière entre la tache solaire et son milieu photosphérique. Pour cela, nous avons utilisé la méthode de décomposition en modes propres, appelée aussi méthode des modes normaux permettant ainsi l'étude de stabilité de ces écoulements MHD et définie comme étant une méthode perturbative, décrivant les petits mouvements de notre structure photosphérique, au voisinage de son équilibre.

3.5.2.1 Méthode des modes normaux

La méthode d'analyse de la stabilité linéaire consiste à introduire une perturbation sinusoïdale sur l'état de base dont la stabilité est étudiée. En effet, sur l'écoulement de base, défini au dessus par (3.63), une perturbation a été superposée étant donné que la manière plus efficace de traiter notre problème de la stabilité MHD de la structure bord était de reformuler les équations de l'ensemble (3.65), en termes de modes propres. Ce qui permet ainsi de mettre en évidence les fréquences caractéristiques supposées complexes et qui tendent naturellement à se développer dans le plasma.

L'ensemble des équations (3.65) est, par conséquent, réduit à une seule équation différentielle contenant des constantes arbitraires dans chaque région $r = 1$, et 2, et dont l'application des conditions aux limites donnerait une condition suffisante pour la solution non-triviale, c'est-à-dire, la relation de dispersion, $D\left(\omega, k\right) = 0$.

Les fréquences propres ω déterminées par la résolution de la relation de dispersion appartiennent au corps des complexes. Nous allons les écrire comme : $\omega = \omega_r + i\omega_i$ où $\omega_r, \omega_i \in \mathbb{R}$. Les modes propres s'écrivent alors :

$$v_x\left(x,z,t\right) = \hat{v}_x^{(r)}\left(x\right)\exp i\left(kz - \omega t\right), \quad \left(r = 1,2\right), \text{etc.},$$

et qui s'écrivent aussi sous la forme :

$$v_x\left(x,z,t\right) = \hat{v}_x^r\left(x\right)\exp^{i\left(kz\right)}\exp^{-i\omega t} = \hat{v}_x^r\left(x\right)\exp^{i\left(kz\right)}\exp^{\omega_i t}\exp^{-i\omega_r t} \quad , \quad \left(r = 1,2\right), etc.,$$

Le terme $\exp^{-i\omega_r t}$ décrit la partie oscillante du mode propre, mais suivant le signe du taux d'amplification ω_i, il est évident que son comportement est radicalement différent. Lorsque la partie imaginaire de ω est négative le mode est amorti, voir sur-amorti quand ω_r est nulle. En revanche, dans le cas où la partie imaginaire de ω est positive, le mode est exponentiellement divergent : il est instable. Si en outre, la partie réelle de la fréquence propre n'est pas nulle lorsque le mode est instable, on parle de surstabilité. Au cours du temps, il diverge tout en oscillant.

Ainsi, l'équilibre est stable pour des racines complexes de l'équation de dispersion $D\left(\omega, k\right) = 0$ ayant des parties imaginaires positives, et stable pour des parties imaginaires négatives. Quant à la stabilité marginale représentant la limite entre la stabilité et l'instabilité, elle se traduit mathématiquement par $\omega_i = 0$.

3.5.2.2 Perturbations compressibles

La stabilité d'une nappe de vortex, avec l'effet d'une nappe de courant, dans un fluide parfaitement conducteur et compressible est étudiée. Contrairement au cas

d'un fluide incompressible, il est trouvé que pour une énergie magnétique moyenne, la nappe de courant a une influence de déstabilisation [21].

L'influence stabilisante des champs magnétiques sur une nappe de vortex dans un fluide infiniment conducteur et incompressible a été démontrée [6]. Fejer [16] a étudié la réflexion et la réfraction hydromagnétique à une discontinuité de vitesse, dans un fluide compressible, en supposant la discontinuité stable. Fejer [17] et Sen [41] ont par ailleurs étudié la stabilité de cette nappe où ils ont tous les deux démontré que pour des champs magnétiques arbitraires d'équilibre, avec une probable discontinuité à travers la nappe de vortex, générant ainsi une nappe de courant, l'influence déstabilisante d'une petite compressibilité.

Fejer a également observé pour une compressibilité arbitraire mais cette fois ci sans la présence d'une nappe de courant, pour quelques cas spéciaux, le champ magnétique critique au-dessous duquel l'instabilité surgit lorsque Sen [41] a lui aussi considéré la stabilité de la nappe de vortex, pour un fluide fortement compressible, sans la présence d'une nappe de courant.

Aussi, ces deux derniers cas ont été examinés lorsque le champ magnétique et le champ de vitesse sont parallèles en tenant compte de l'influence d'une compressibilité arbitraire, mais sans la présence d'une nappe de courant [48]. Concernant les traveaux de Jindia et Chakraborty [21] ainsi que Rae [35], ils ont, par contre, considéré l'effet d'une compressibilité arbitraire en présence d'une nappe de courant, en supposant la discontinuité du champ magnétique à travers la nappe de vortex de façon simultanée.

Afin d'étudier l'effet d'une nappe de courant sur la stabilité d'une nappe de vorticité, en prenant une discontinuité dans le champ magnétique à travers elle, à savoir, $\left(\beta_1 \neq \beta_2\right)$, avec $\beta_r = \frac{v_{Ar}}{c_r}$, et v_{Ar} : est la vitesse d'Alfvén pour les deux milieux, respectifs, $r = 1$, et 2, et en supposant que la vitesse sonore $c_1 = c_2 = c_S$, ce qui impliquerait la continuité de la température à travers la nappe de vortivcité en équilibre ; ces auteurs se sont principalement intéressés à l'effet de l'augmentation du nombre de Mach sur l'écoulement, où, leurs travaux ont abouti à une conclusion importante, à savoir, l'influence déstabilisante de l'intensité de la nappe de courant sur la nappe de vorticité.

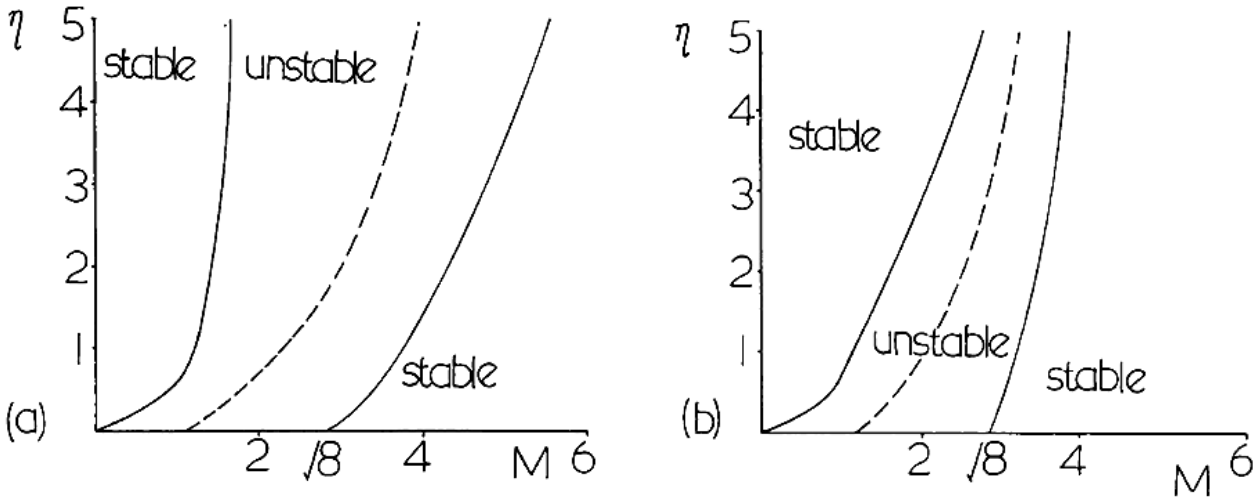

Figure 26 – Diagramme de Stabilité d'une seule nappe de Vorticité-Courant avec (a) : R=1/12 et (b) : R=1/2 (réf. [21]).

Cependant, Rae a examiné les deux cas particuliers que sont : $R = \frac{1}{12}$, et $R = \frac{1}{2}$, où R désigne le rapport de champ magnétique des deux milieux : $R = B_1^2 / B_2^2$ qui indique l'intensité de la nappe de courant, avec la vitesse relative du courant, $V = \left(V_1 - V_2\right)$, pour lesquels, il a établit le diagramme de stabilité représenté par les Figure 26a et 26b, qui est tracé en fonction du nombre de Mach : $M = \frac{|V|}{c_S}$ et de l'énergie magnétique moyenne : $Z = \eta = \left(1 + R\right)\frac{v_{A2}^2}{c_S^2}$.

En particulier, on a examiné l'effet de la nappe de courant sur la stabilité d'une nappe de vortex, dans un fluide parfaitement conducteur et compressible où nous gardons les mêmes conditions d'équilibre que celles adoptées par Jindia et Chakraborty [9] ainsi que Rae [35]. On signale que nous travaillons avec les mêmes constantes et variables employées par ce dernier.

Procédant alors comme Rae et adoptant la même notation, le système d'axes des axes, et d'unités, on obtient l'équation différentielle analogue à (3.66) :

$$\frac{d^2 v_x^{(r)}\left(x\right)}{dx^2} = m_r^2 v_x^{(r)}\left(x\right),$$

tel que $v_x^{(r)}\left(x\right) \to 0$ à $\pm\infty$,

$$\begin{aligned} v_x^{(1)}\left(x\right) &= A_- \exp\left(m_1 x\right), \qquad & x < 0, \\ v_x^{(2)}\left(x\right) &= A_+ \exp\left(m_2 x\right), \qquad & x > 0. \end{aligned}$$

En imposant les conditions aux limites (3.68), et (3.69), ainsi que quelques calculs algébriques, on aboutit à l'équation de dispersion suivante :

$$D\left(\omega,k\right)=\frac{\rho_1 m_1\left(c_1^2+v_{A1}^2\right)\left(k^2c_{T1}^2-\left(\omega-V_1k\right)^2\right)}{\left(k^2c_1^2-\left(\omega-V_1k\right)^2\right)}+\frac{\rho_2 m_2\left(c_2^2+v_{A2}^2\right)\left(k^2c_{T2}^2-\left(\omega-V_1k\right)^2\right)}{\left(k^2c_2^2-\left(\omega-V_1k\right)^2\right)}=0 \tag{3.70}$$

L'équation (3.70) conduit à une relation de dispersion des ondes de surface sur une seule nappe de vortex-courant, correspondant à un polynôme d'ordre dix de la variable ω ([43], [25]), qui est évidemment difficile à résoudre analytiquement.

Notons que la relation de dispersion (3.70) des ondes de surface à une seule nappe de vortex-courant peut être réécrite sous la forme

$$\frac{\rho_1\left(v_{A1}^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)^2\right)}{m_1}=-\frac{\rho_2\left(v_{A2}^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)^2\right)}{m_2}, \tag{3.71}$$

où

$$m_r\left(x\right)=\frac{\left[1-\left(\frac{\omega}{k}-V_r\right)^2/v_{Ar}^2\right]^{1/2}\left[1-\left(\frac{\omega}{k}-V_r\right)/c_r^2\right]^{1/2}}{\left[1-\left(\frac{\omega}{k}-V_r\right)^2/c_r^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_r\right)^2/v_{Ar}^2\right]^{1/2}},\quad r=1,ou\ 2, \tag{3.72}$$

Cas particulier : lorsque $c_r\to\infty$, $m_1=m_2=1$, l'équation (3.71) se réduit au cas incompressible et lorsque $v_{Ar}\to 0$, elle se réduit au cas hydrodynamique considéré par Rae [35] et autres.

Afin de déterminer le critère de stabilité, on établi en élevant au carré l'équation (3.71), afin d'aboutir, après quelques simplifications, à un polynôme de six degrés en utilisant les ariables, respectives, $q_1=\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)$, et $q_2=\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)$ comme suit :

$$\begin{aligned}&\left(\rho_1^2\left(c_1^2+v_{A1}^2\right)q_1^2-\rho_2^2\left(c_2^2+v_{A2}^2\right)q_2^2\right)q_1^2q_2^2-\left(\rho_1^2\left(2c_1^2v_{A1}^2+v_{A1}^4\right)-\rho_2^2\left(2c_2^2v_{A2}^2+v_{A2}^4\right)\right)q_1^2q_2^2\\&+\left(\rho_1^2c_1^2v_{A1}^4-\rho_2^2c_1^2\left(2c_2^2v_{A2}^2+v_{A2}^4\right)\right)q_2^2-\rho_1^2c_2^2\left(c_1^2+v_{A1}^2\right)q_1^4+\rho_2^2c_1^2\left(c_2^2+v_{A2}^2\right)q_2^4\\&-\left(\rho_1^2c_1^2c_2^2v_{A1}^4-\rho_2^2c_1^2c_2^2v_{A2}^4\right)+\left(\rho_1^2c_2^2\left(2c_1^2v_{A1}^2+v_{A1}^4\right)-\rho_2^2c_2^2v_{A2}^4\right)q_1^2=0.\end{aligned} \tag{3.73}$$

On peut donner une autre forme de représentation de l'équation (3.73) qui s'écrit aussi comme :

$$\left(\rho_2^2\beta_2^4-\rho_1^2\beta_1^4\right)\left(1-\left(\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)}{c_1}\right)^2-\left(\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)}{c_2}\right)^2\right)-2\left(\rho_2^2\beta_2^2\left(\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)}{c_2}\right)^2-\rho_1^2\beta_1^2\left(\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)}{c_1}\right)^2\right)$$
$$+\left(\rho_2^2\beta_2^2\left(2+\beta_2^2\right)-\rho_1^2\beta_1^2\left(2+\beta_1^2\right)\right)\left(\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)}{c_1}\right)^2\left(\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)}{c_2}\right)^2+\rho_2^2\left(1+\beta_2^2\right)\left(\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)}{c_2}\right)^4$$
$$-\left(\rho_1^2\left(1+\beta_1^2\right)\right)\left(\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)}{c_1}\right)^4+\left(\begin{array}{c}\rho_1^2\left(1+\beta_1^2\right)\left(\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)}{c_1}\right)^2\\ -\rho_2^2\left(1+\beta_2^2\right)\left(\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)}{c_2}\right)^2\end{array}\right)\left(\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)}{c_1}\right)^2\left(\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)}{c_2}\right)^2=0,$$

(3.74)

où V_1, ρ_1, c_1 et $\beta_1=\left(\frac{v_{A1}}{c_1}\right)$ désignant respectivement la vitesse du fluide non perturbé, la pression, la vitesse sonore, et le rapport de la vitesse de l'onde d'Alfvén à la vitesse sonore d'un coté, et V_2, ρ_2, c_2, et $\beta_2=\left(\frac{v_{A2}}{c_2}\right)$ sont les mêmes quantités sur l'autre coté de la nappe de vortex. $C=\frac{\omega}{k}$: correspond à la vitesse de propagation des perturbations.

Par conséquent, dans l'approximation de perturbations bidimensionnelles, se propageant le long des champs non perturbés, on établit la relation de dispersion suivante :

$$
\begin{aligned}
&\left(\beta_2^4 - Q^2\beta_1^4\right)\left(1-\left(\frac{q_1}{c_1}\right)^2-\left(\frac{q_2}{c_2}\right)^2\right)-2\left(\beta_2^2\left(\frac{q_2}{c_1}\right)^2-Q^2\beta_1^2\left(\frac{q_1}{c_2}\right)^2\right)\\
&+\left(\beta_2^2\left(2+\beta_2^2\right)-Q^2\beta_1^2\left(2+\beta_1^2\right)\right)\left(\frac{q_1}{c_1}\right)^2\left(\frac{q_2}{c_2}\right)^2+\left(1+\beta_2^2\right)\left(\frac{q_2}{c_2}\right)^4-\left(Q^2\left(1+\beta_1^2\right)\right)\left(\frac{q_1}{c_1}\right)^4\\
&+\left(Q^2\left(1+\beta_1^2\right)\left(\frac{q_1}{c_1}\right)^2-\left(1+\beta_2^2\right)\left(\frac{q_2}{c_2}\right)^2\right)\left(\frac{q_1}{c_1}\right)^2\left(\frac{q_2}{c_2}\right)^2=0,
\end{aligned}
\tag{3.75}
$$

avec $Q=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}$ le rapport adimensionnel de la densité des deux milieux $\left(r=1,2\right)$ et $\dfrac{q_1}{c_1}=\dfrac{\omega}{kc_1}-\dfrac{V_1}{c_1}$, ainsi que $\dfrac{q_2}{c_2}=\dfrac{\omega}{kc_2}-\dfrac{V_2}{c_2}$ représente, respectivement, la vitesse de phase Doppler-Shifted adimensionnelle du milieu 1 et 2.

Sachant que la pression totale, (la pression du gaz combiné à la pression magnétique) est continue à travers la nappe de vortex, on a :

$$
\rho_1\left(c_1^2+\frac{\gamma}{2}v_{A1}^2\right)=\rho_2\left(c_2^2+\frac{\gamma}{2}v_{A2}^2\right).
\tag{3.76}
$$

On étudie, ici, l'effet d'une nappe de courant sur la stabilité d'une nappe de vortex, en présence d'une discontinuité dans le champ magnétique $\left(\beta_1\neq\beta_2\right)$ et où l'on a supposé $c_1=c_2$. Ceci implique la continuité de la température à travers la nappe de vortex, en équilibre et, par conséquent, pour un plasma isotherme, on prendra l'indice polytopique égale à un $\left(\gamma=1\right)$, compatible avec le milieu de la tache solaire et dont l'écoulement de base est immobile, à savoir, $V_2=0$.

Dans ces conditions, Ainsi, la relation de dispersion (3.75) se réduit à :

$$
\begin{aligned}
&\left[Q^2\left(1+\beta_1^2\right)-\left(1+\beta_2^2\right)\right]x^6-2M\left[2Q^2\left(1+\beta_1^2\right)-\left(1+\beta_2^2\right)\right]x^5\\
&+\left\{\begin{array}{l}Q^2\left[6M^2\left(1+\beta_1^2\right)-\beta_1^2\left(\beta_1^2+2\right)-\left(1+\beta_1^2\right)\right]\\-\left[\left(M^2-1\right)\left(1+\beta_2^2\right)-\beta_2^2\left(\beta_2^2+2\right)\right]\end{array}\right\}x^4\\
&+2M\left\{Q^2\left[2\left(1+\beta_1^2\right)-2M^2\left(1+\beta_1^2\right)+\beta_1^2\left(\beta_1^2+2\right)\right]-\beta_2^2\left(\beta_2^2+2\right)\right\}x^3\\
&\left\{\begin{array}{l}Q^2\left[-6M^2\left(1+\beta_1^2\right)+\beta_1^2\left(\beta_1^2+2\right)+M^4\left(1+\beta_1^2\right)-M^2\beta_1^2\left(\beta_1^2+2\right)+\beta_1^4\right]\\-\left[\beta_2^4-\left(M^2-1\right)\beta_2^2\left(\beta_2^2+2\right)\right]\end{array}\right\}x^2\\
&+2M\left\{Q^2\left[2M^2\left(1+\beta_1^2\right)-\beta_1^2\left(\beta_1^2+2\right)+\beta_2^4\right]\right\}x\\
&-\left\{Q^2\left[M^2-\beta_1^2\right]\left[M^2\left(1+\beta_1^2\right)-\beta_1^2\right]+\left(M^2-1\right)\beta_2^4\right\}=0,
\end{aligned}
\tag{3.77}
$$

On admet, sans perte de généralité que , $V_2 = 0$, et l'on a utilisé les quantités adimensionnelles $M = \frac{V_1}{c_1}$, $Q = \frac{\rho_1}{\rho_2}$, et $C_1 = \frac{C}{c_1} = \frac{\omega}{kc_1}$. En introduisant les quantités $R = \frac{B_1^2}{B_2^2}$ et $Z = \left(1+R\right)\frac{v_{A2}^2}{c_1^2} = \left(1+R\right)\beta_2^2$, sachant que les quantités adimensionnelles Q, β_1^2, et β_2^2 peuvent toutes être exprimées en fonction de Z et R, comme suit :

$$\beta_2^2 = \frac{v_{A2}^2}{c_1^2} = \frac{Z}{\left(1+R\right)}, \tag{3.78}$$

$$\beta_1^2 = \frac{v_{A1}^2}{c_1^2} = \frac{2\ R\ Z}{\left(2\left(1+R\right)+\gamma\ Z\ \left(1+R\right)\right)}, \tag{3.79}$$

et

$$Q = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\left(2\left(1+R\right)+\gamma\ Z\ \left(1\text{ - }R\right)\right)}{2\left(1+R\right)}, \tag{3.80}$$

avec

$$Q^2 = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 = \frac{\left(2\left(1+R\right)+\gamma\ Z\ \left(1\text{ - }R\right)\right)^2}{4\left(1+R\right)^2}. \tag{3.81}$$

Le critère de stabilité de la nappe de vortex est examiné à travers la résolution de l'équation (3.77) en fonction de C_1 en remplaçant les quantités β_2^2, β_1^2, et Q^2 par leurs expressions, respectives, (3.78), (3.79), et (3.81). La résolution se fait pour R fixe, mais en faisant varier différentes valeurs de Z et de M. Une racine complexe admissible de (3.77) avec une partie imaginaire positive indique l'existence d'une instabilité où toutes les racines sont testés numériquement pour leur admissibilité. On admet qu'une racine complexe est admissible si elle satisfait l'équation (3.71) avec (3.72), ayant des parties réelles positives pour les deux milieux, respectifs, $r = 1,\ et\ 2$. Par conséquent, on doit avoir $\left[\rho_1\left(v_{A1}^2 - \left(\frac{\omega}{k} - V_1\right)^2\right)\right]$ qui est doit être de signe contraire à $\left[\rho_2\left(v_{A2}^2 - \left(\frac{\omega}{k} - V_2\right)^2\right)\right]$. De plus on examine le cas particulier où $V_2 = 0$ tout en satisfaisant la condition d'existence des ondes de surface, caractérisé par m_1^2 et m_2^2, qui doivent être tous les deux positifs.

Chapitre 4. Analyse des résultats

4.1 Introduction

Ce travail a été décomposé en deux parties différentes tenant compte des variations de R, autrement dit, pour le cas où $R \leq 0.50$, et celui où $R > 0.50$. La raison tient du fait que l'on constate que l'évolution de $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}(\mathrm{M})$, à savoir, l'énergie magnétique moyenne, présente un maximum caractéristique lorsque le rapport des deux champs magnétqiues augmente, c'est-à-dire lorsque l'intensité de la nappe de courant diminue. Le but de l'étude consiste à dégager les zones de stabilité et de l'instabilité au voisinage de l'état marginal $(\omega_i = 0)$, l'interprétation des courbes de stabilité se fait à la lumiére des variations de l'énergie magnétique moyenne en fonction du nombre Mach afin de préciser les domaines d'influence de l'action du champ magnétique par rapport à la vitesse de propagation de l'instabilité.

4.2 Interpretation

Les résultats des calcule établis pour les deux cas, respectifs, $R = \frac{1}{12}$, *et* $R = \frac{1}{2}$, montrent les domaines de stabilité qui, sont illustrés sur les deux figures suivantes :

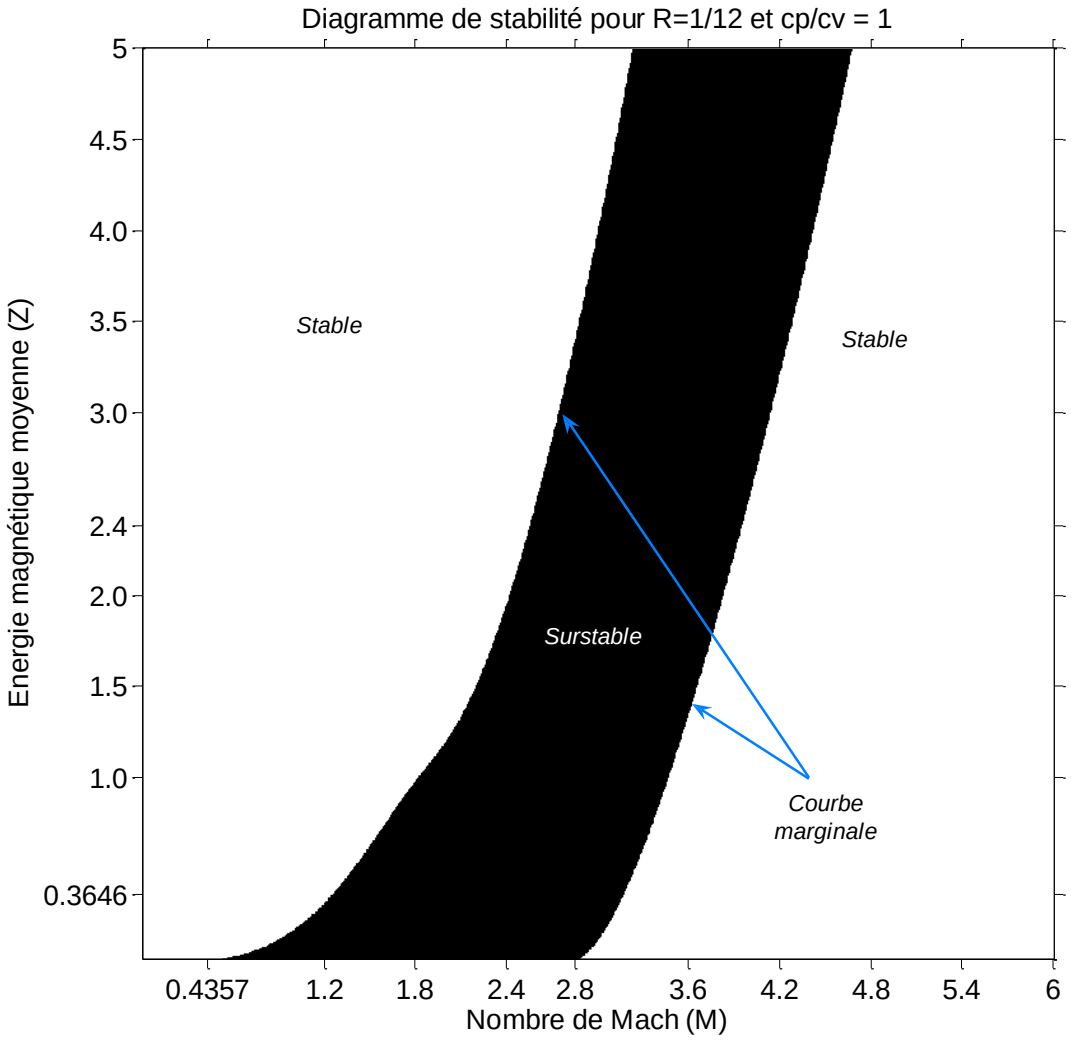

Figure 27 – Diagramme de stabilité d'une seule nappe de vorticité-courant pour (R=1/12).

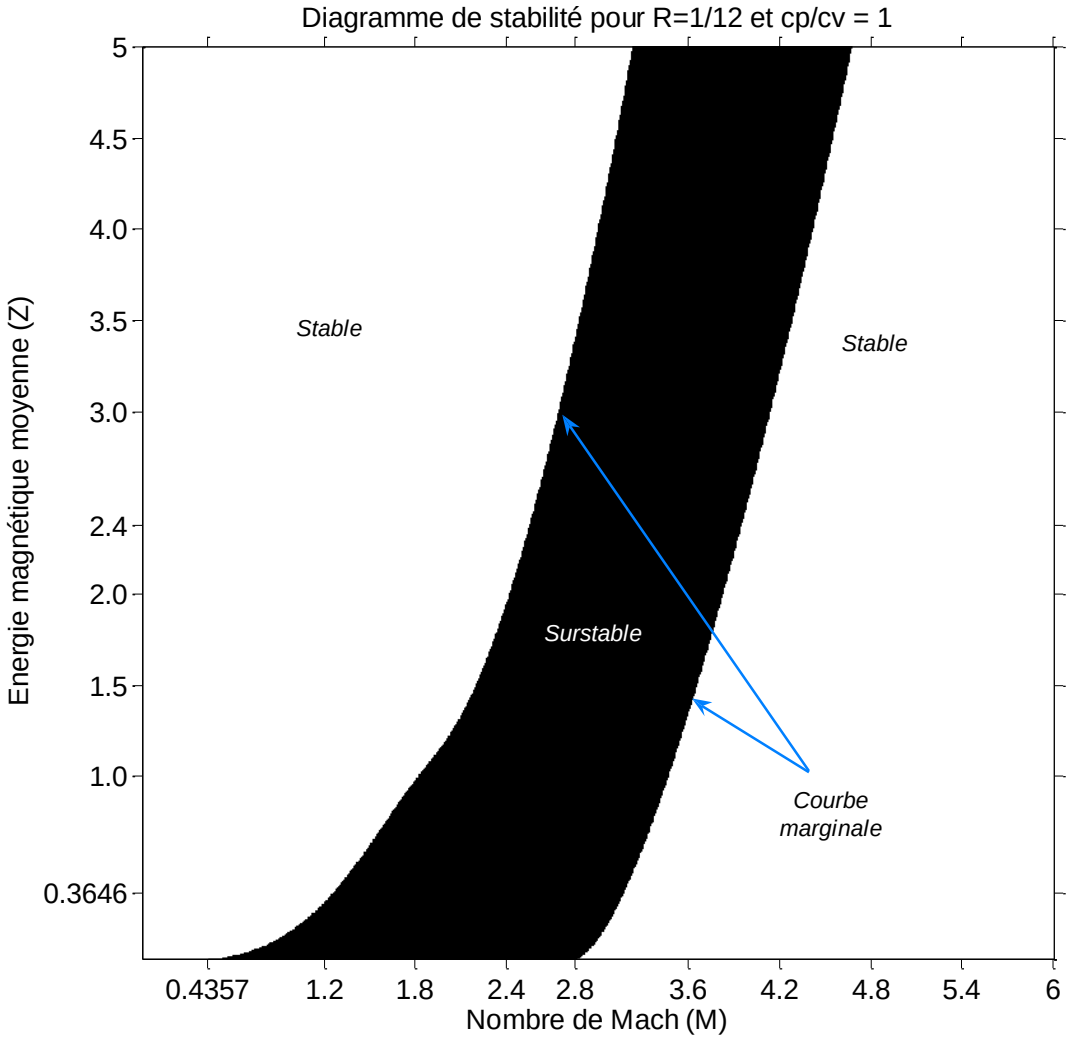

Figure 28 – Diagramme de stabilité d'une seule nappe de vorticité-courant pour (R=1/2).

La limite séparant le domaine de stabilité et d'instabilité s'appelle l'état marginal, correspondant donc à ω réel pur, autrement dit, $\omega_i = 0$.

Cette courbe marginale de forme particulière délimite le mode surstable : régime caractérisé par des oscillations d'amplitude croissante se développant pour ω complexe à partie imaginaire positive des deux modes stables.

Sur les deux figures, respectives, 27 et 28, on montre l'évolution de l'instabilité à l'état marginale qui délimite les deux modes stables du mode oscillant de l'instabilité. Le cas particulier important correspondant au mode oscillant qui s'amplifie, est caractérisé par une solution avec une partie imaginaire positive $\left(\omega_i > 0\right)$, et une partie réelle de fréquence propre non nulle $\left(\omega_r \neq 0\right)$. Dés lors, ce mode oscillatoire de l'instabilité réalise le phénomène « d'overstability » qualifié aussi de surstabilité.

Afin d'illustrer les deux courbes de stabilité marginales, délimitant, ainsi, les deux modes stables du mode oscillant on a examiné les deux cas respectifs, $R = 1/2$, et $R = 1/12$, afin d'analyser l'évolution des deux modes oscillatoires d'instabilité.

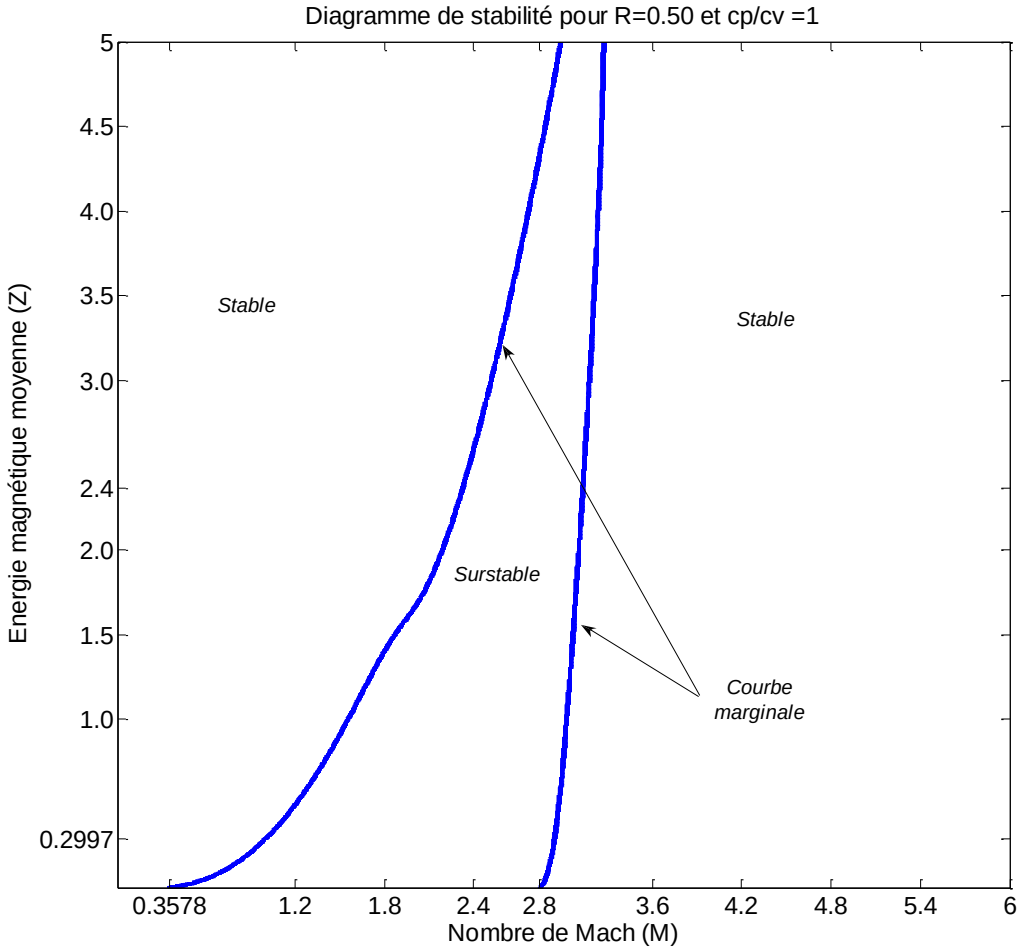

Figure 29 – Courbe de stabilité marginale pour (R=0.50)

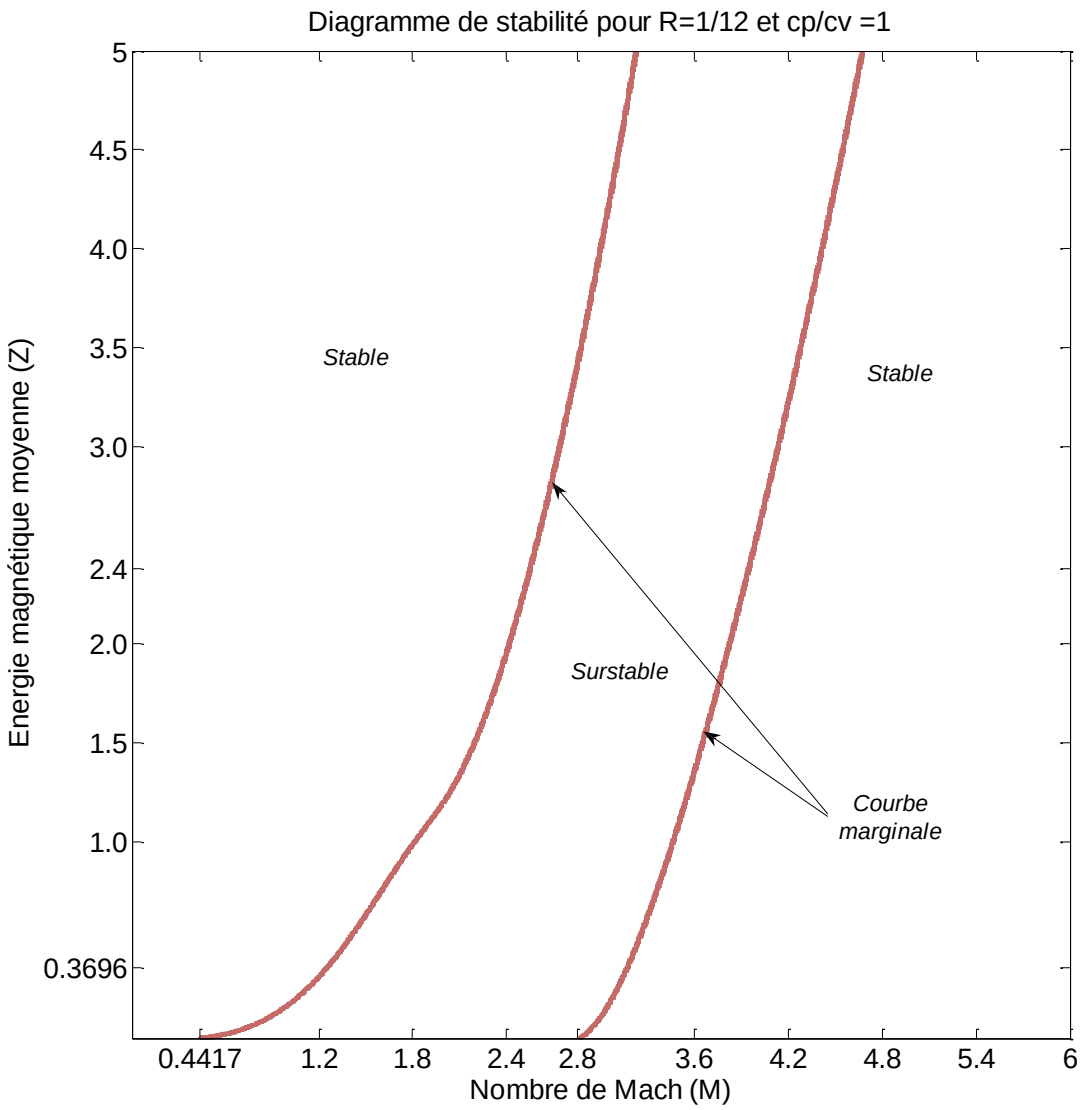

Figure 30 – Courbe de stabilité marginale pour (R=0.0833)

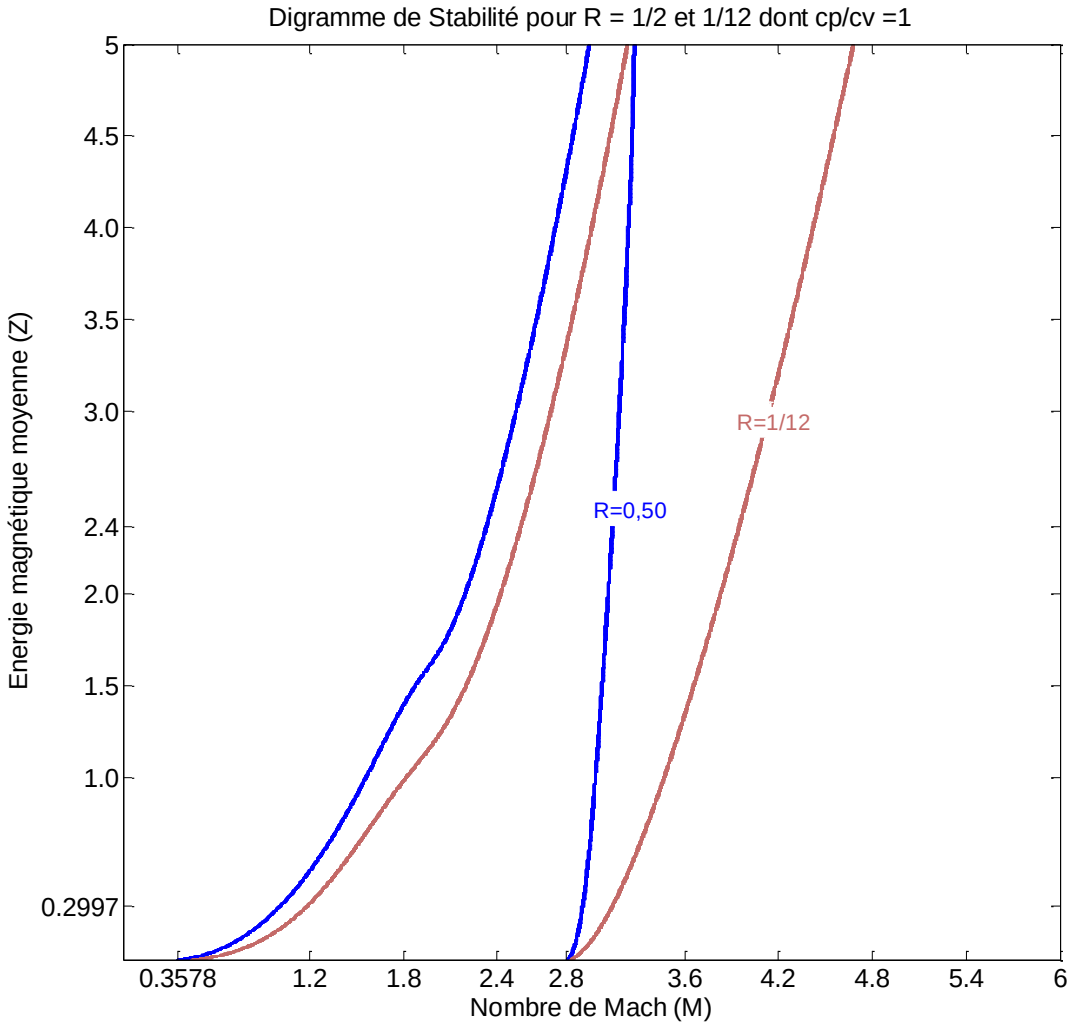

Figure 31 – Evolution de la courbe de stabilité marginale pour (R=0.50 et R=0.0833).

Cette courbe a pour interét de montrer l'évolution du mode Surstable en fonction de l'énergie magnétique moyenne $\left(Z=\left(1+R\right)\frac{v_{A2}^{2}}{c_{1}^{2}}\right)$ et du nombre de Mach $\left(M=\frac{V_{1}}{c_{1}}\right)$, paramétrée en fonction de l'intensité de la nappe de courant, en l'occurrence, R décroissant.

Il s'agit de mettre en évidence l'influence déstabilisante de la nappe de courant sur la nappe de vorticité dans un fluide parfaitement conducteur et compressible. Pour cela on a tracé en détail la courbe de stabilité marginale pour les différentes valeurs de R, variant de $R=0.50$ jusqu'à $R=0.10$ correspondant à un pas égale à 0.10, que l'on retrouve dans les diagrammes de stabilité suivants :

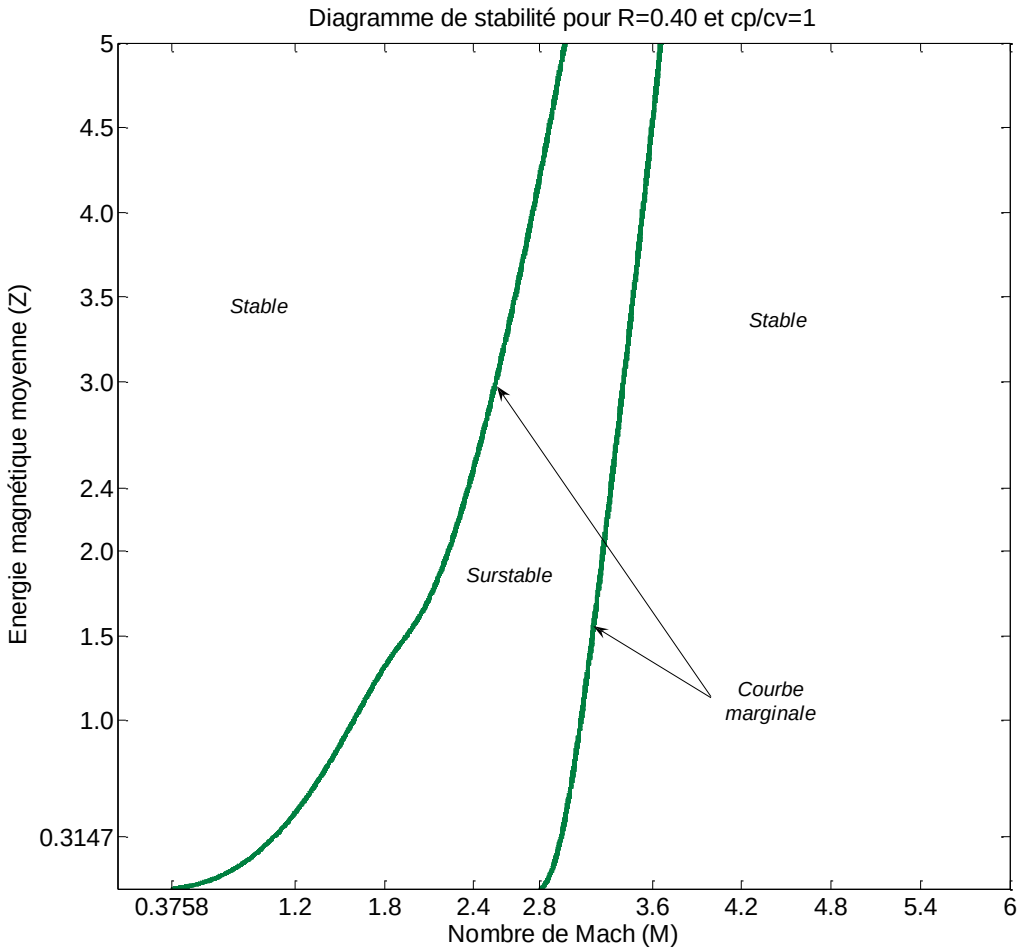

Figure 32 – Courbe de stabilité marginale pour (R=0.40).

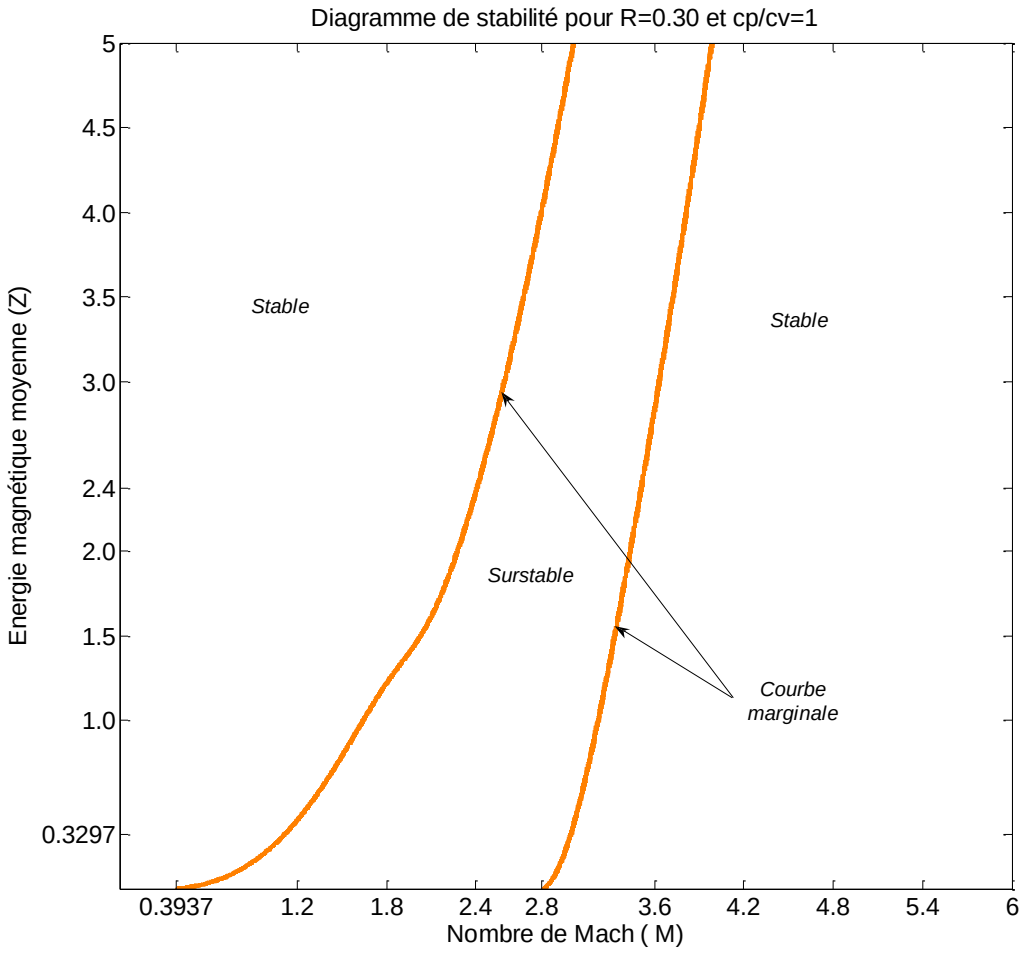

Figure 33 – Courbe de stabilité marginale pour (R=0.30).

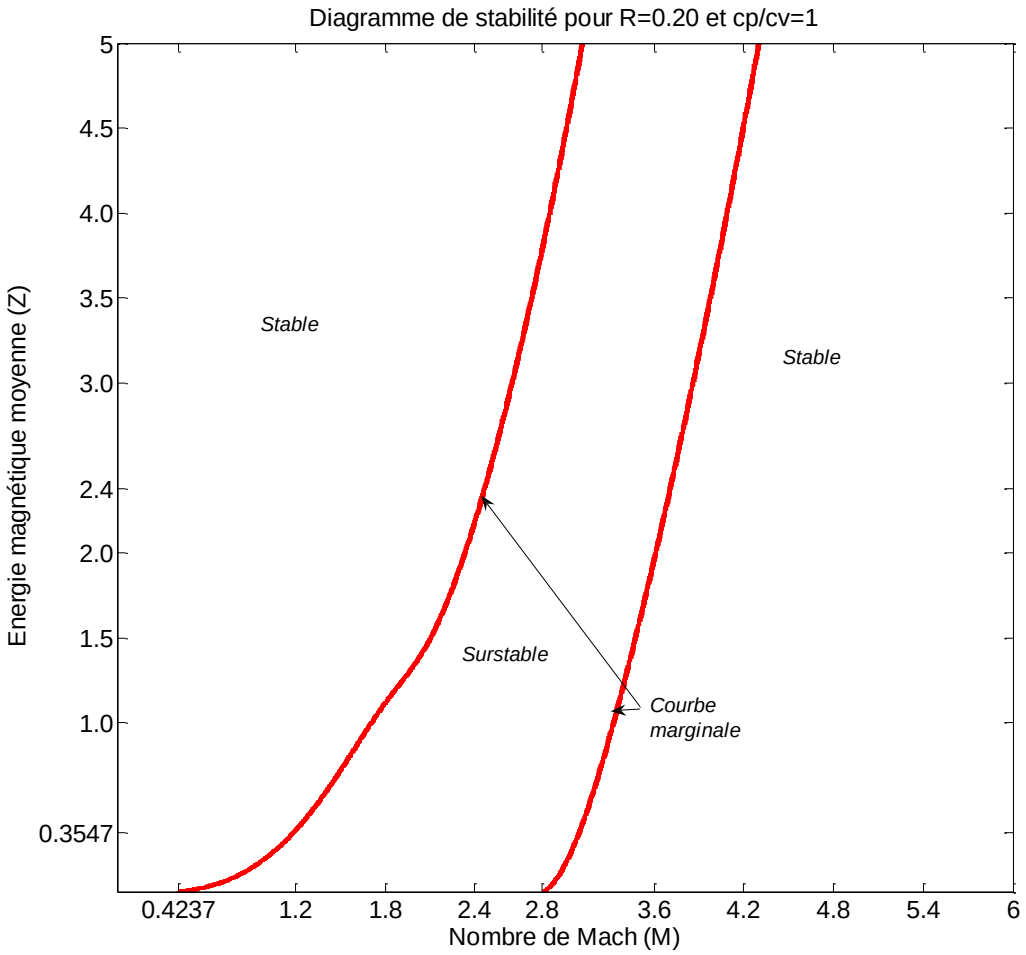

Figure 34 – Courbe de stabilité marginale pour (R=0.20).

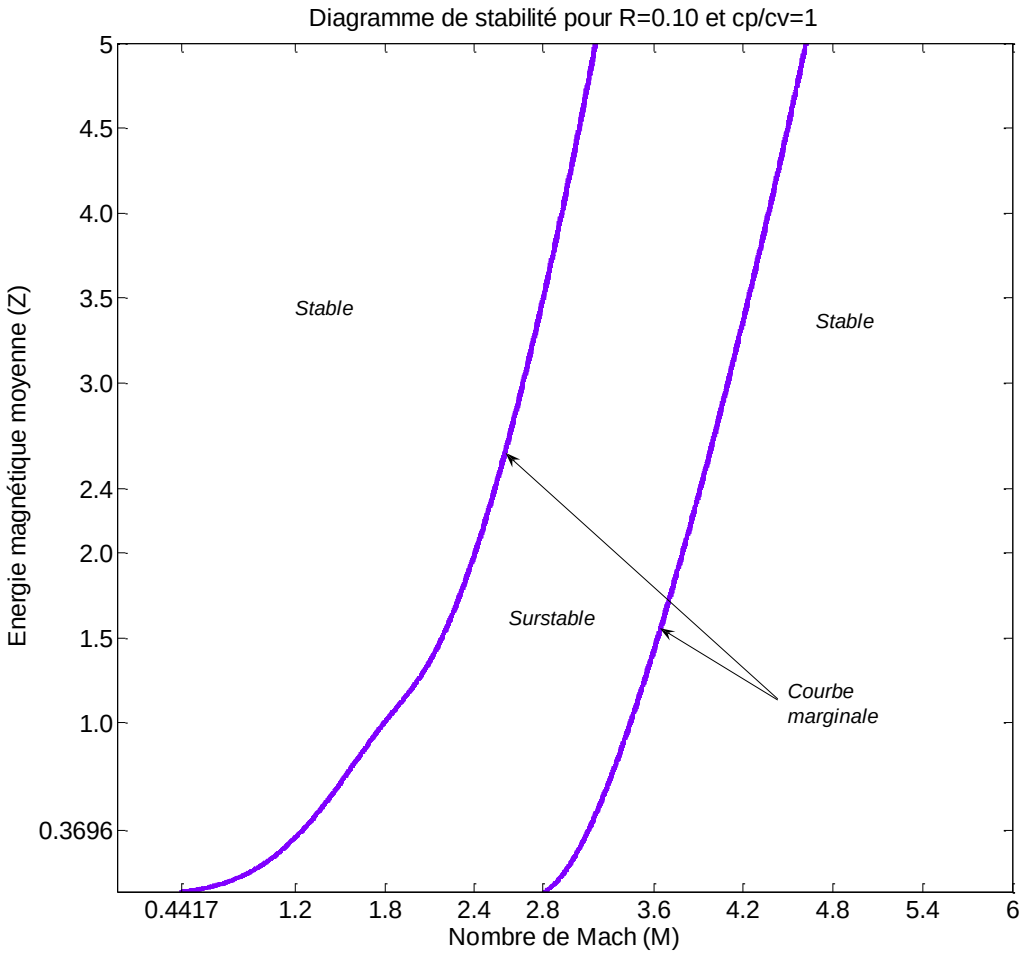

Figure 35 – Courbe de stabilité marginale pour (R=0.10).

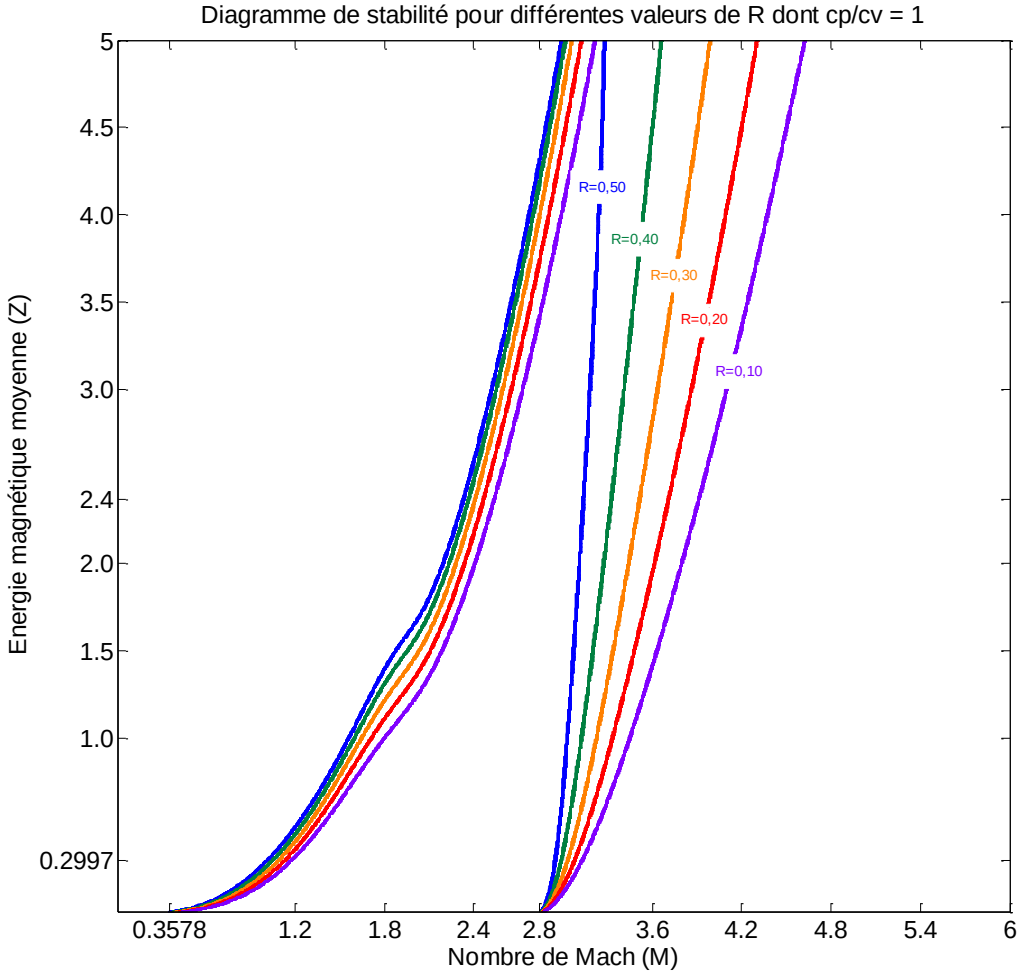

Figure 36 – Evolution comparée de la courbe de stabilité marginale pour R décroissant.

La stabilité de la nappe de vorticité dans un fluide compressible, de deux cotés où le champ magnétique et le champ de vitesse sont parallèles, dépent de l'énergie magnétique et de l'intensité de la nappe de courant en fonction de l'écart du champ magnétique imposé au voisinage de la nappe de vorticité, pour R variant dans le domaine $\left[0.50 : 0.10 : 0.10\right]$, que l'on a regroupé dans un seul graphe:

A travers, les résultats obtenus illustrés dans les figures ci-dessus, nous constatons que :

1. Le mode Surstable devient prépondérant au fur et à mesure que l'intensité de la nappe de courant augmente, c'est-à-dire lorsque R décroit, avec un effet stabilisant due à l'énergie magnétique moyenne pour R donné.

2. On note, également, que ce mode Surstable est caractérisé par un deuxième seuil critique du nombre de Mach, à savoir, $M_{critique} = \sqrt{8}$, correspondant à l'écart de l'intensité de courant donnée mais il ne s'en trouve pas borné par le même intervalle du nombre de Mach, où nous enregistrons une légère augmentation dans le premier seuil critique du nombre de Mach, donnant, par conséquence, $M_{critique}$=0.3578, 0.3758, 0.3937, 0.4417, correspondant, respectivement, à l'augmentation de l'intensité de la nappe de courant, en l'occurrence, R=0.50, 0.40, 0.30, 0.20, 0.10. Le premier seuil critique présente un écart de 20% relativement important alors que le deuxième seuil critique reste invariant.
3. Pour R décroissant, l'évolution des deux branches semble paralléle dans l'ensemble. Cependant, on observe un tassement paralléle au niveau de la premiére branche et on note divergence appréciable pour la deuxiéme branche.
4. Dans le cas hydrodynamique, le mode est stable pour $\mathrm{M} > \sqrt{8}$, contrairement au cas magnétohydrodynamique où nous observons une région stable pour le nombre de Mach subsonique et un domaine instable comprenant les vitesses subsoniques et les vitesses supersoniques avec le domaine du mode surstable qui augmente pour des vitesses supersoniques.

D'autre part, l'évolution de ce mode Surstable en fonction de l'énergie magnétique moyenne, du nombre de Mach, et de, cette fois-ci, la diminution de l'intensité de courant, où, dans ce cas, nous augmentons le nombre de R (c'est-à-dire pour un R croissant) jusqu'à obtenir deux milieux imprégnés par, approximativement, le même champ magnétique, et uniforme de part et d'autre de la nappe de vorticité, dont, $R = 1.0$; nous a permis, quand à elle, comme on le verra en dessous, d'expliquer la forme que prend notre courbe marginale.

Pour cela, nous avons tracé cette courbe marginale, pour toutes les grandeurs de l'intensité de courant, appartenant à l'intervalle $R \in \left[0.57 : 0.11 : 1.00\right]$, dont, l'évolution est montrée comme suit :

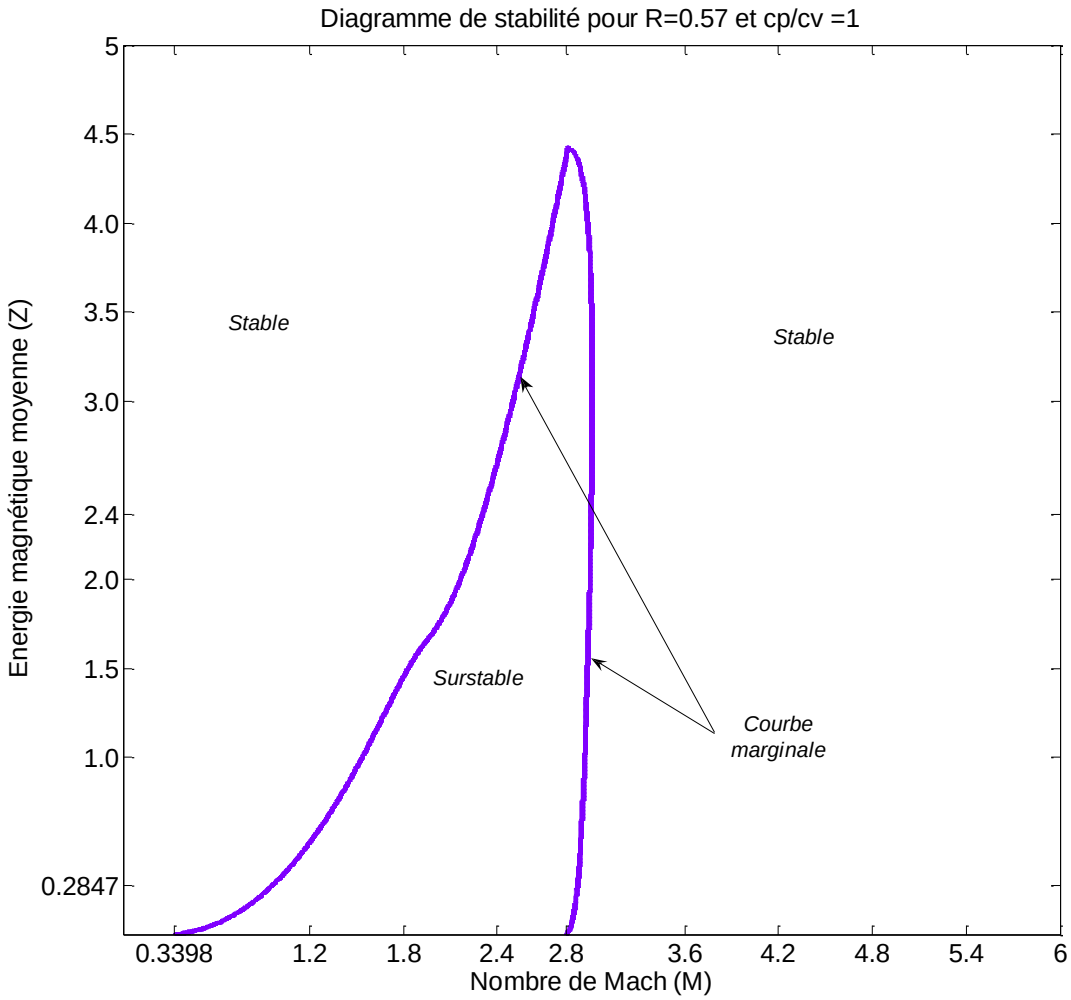

Figure 37 – Courbe de stabilité marginale pour (R=0.57).

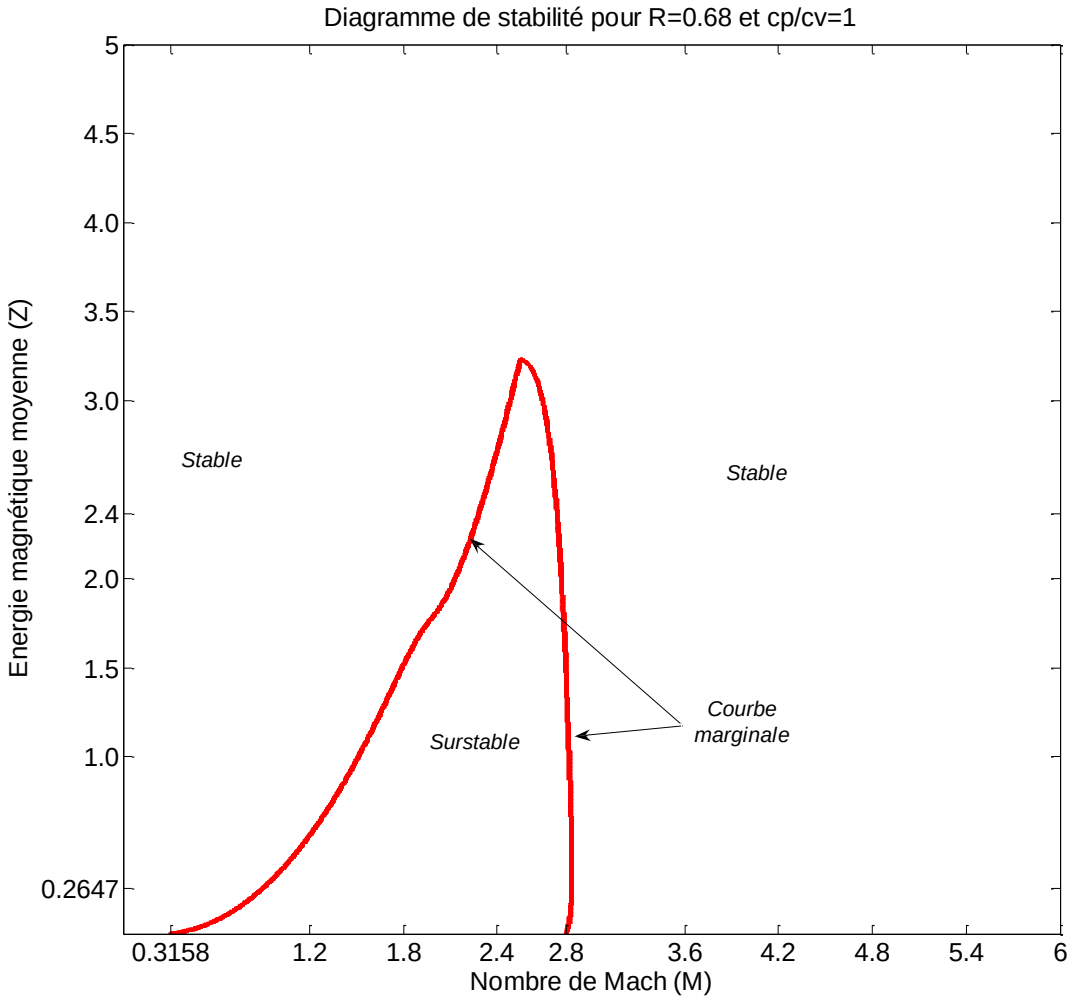

Figure 38 – Courbe de stabilité marginale pour (R=0.68).

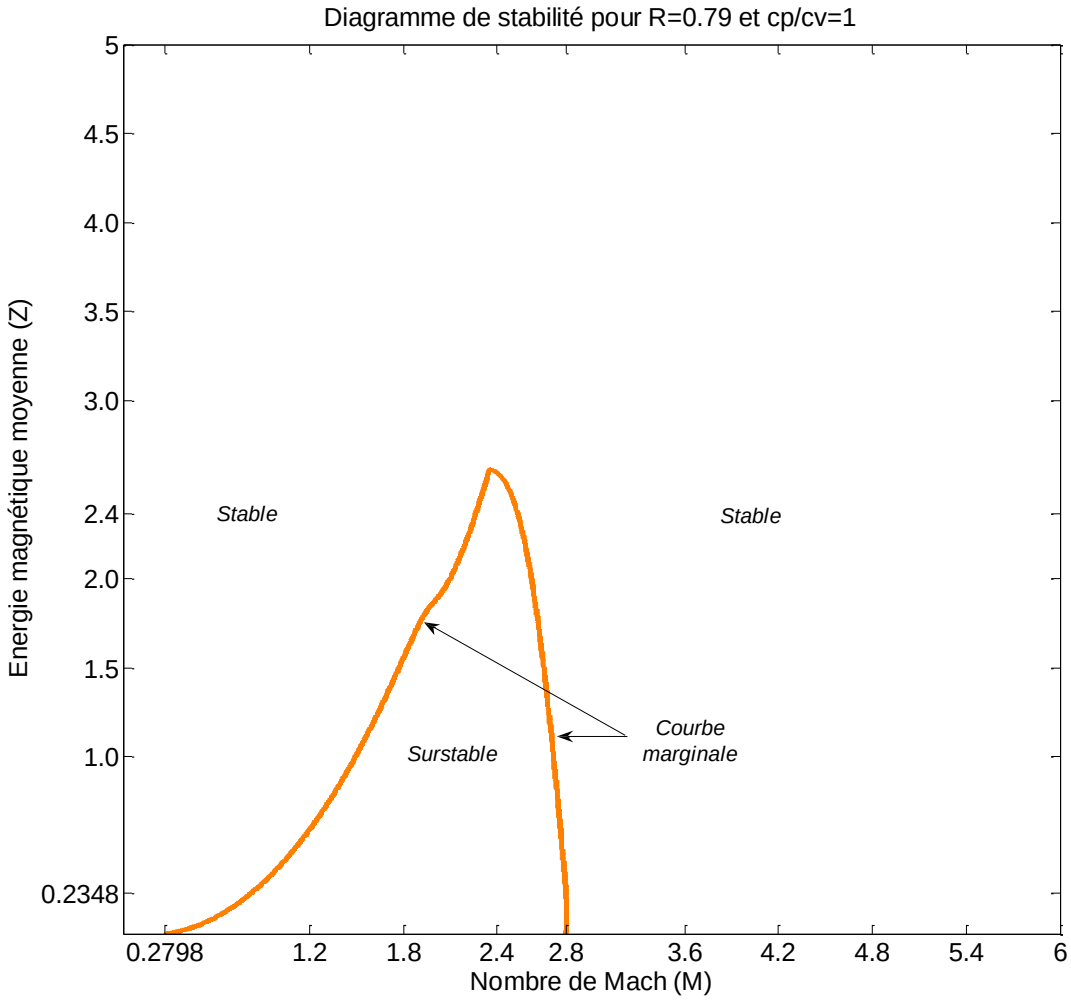

Figure 39 – Courbe de stabilité marginale pour (R=0.79).

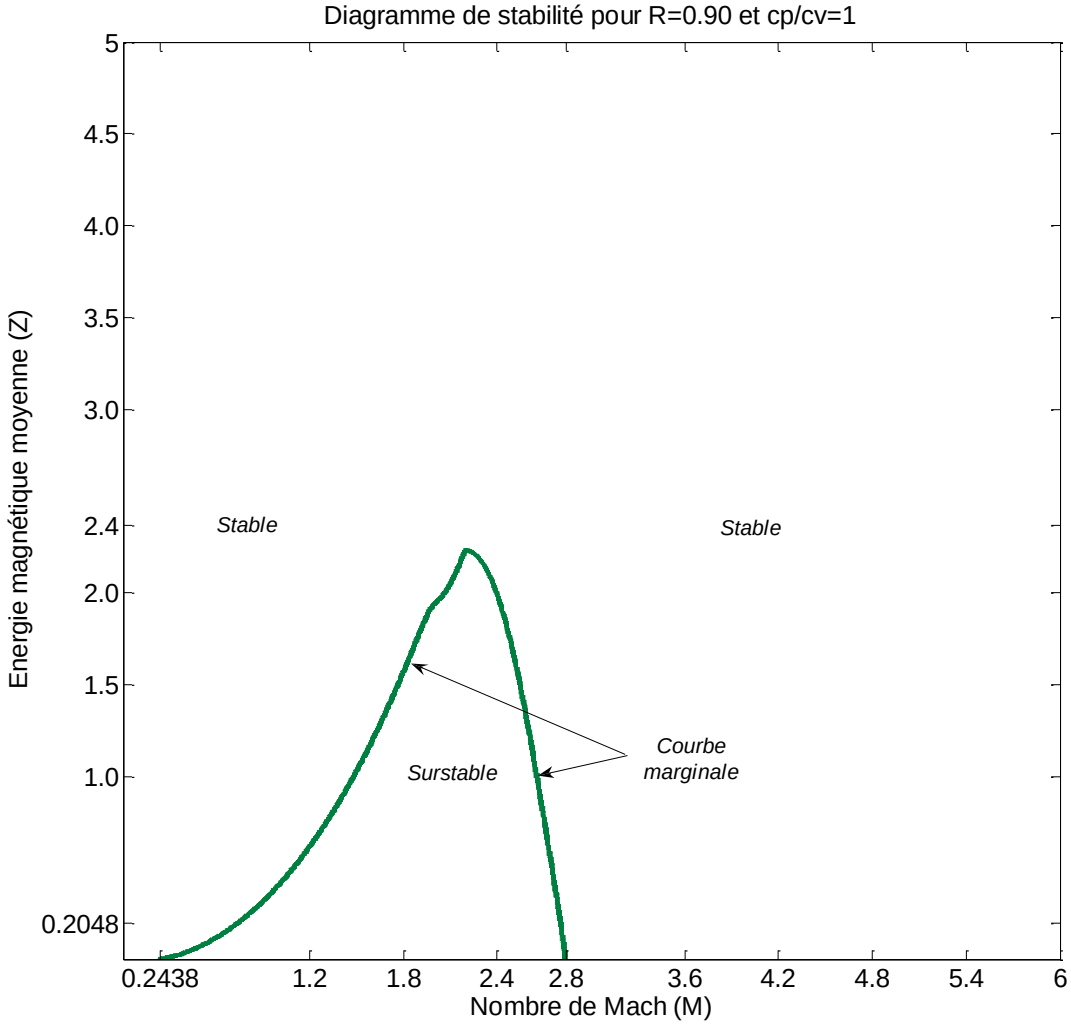

Figure 40 – Courbe de stabilité marginale pour (R=0.90).

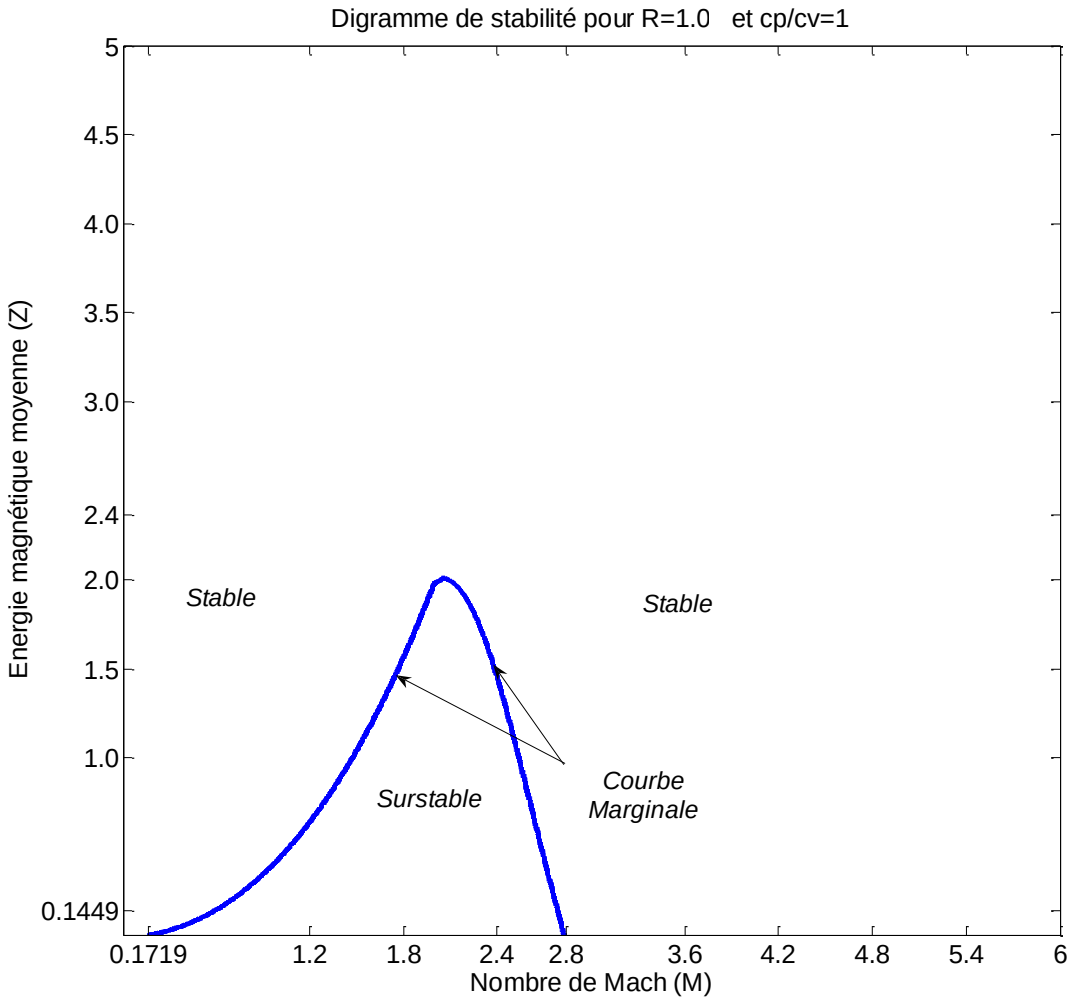

Figure 41 – Courbe de stabilité marginale pour (R=1.0).

Dans ce même objectif, à savoir, mieux appréhender l'aspect que prend la courbe marginale, on a tracé toutes ces courbes en même temps dans un seul graphe, donnant, par conséquent, la variation du mode Surstable montrée dans la figure ci-dessous :

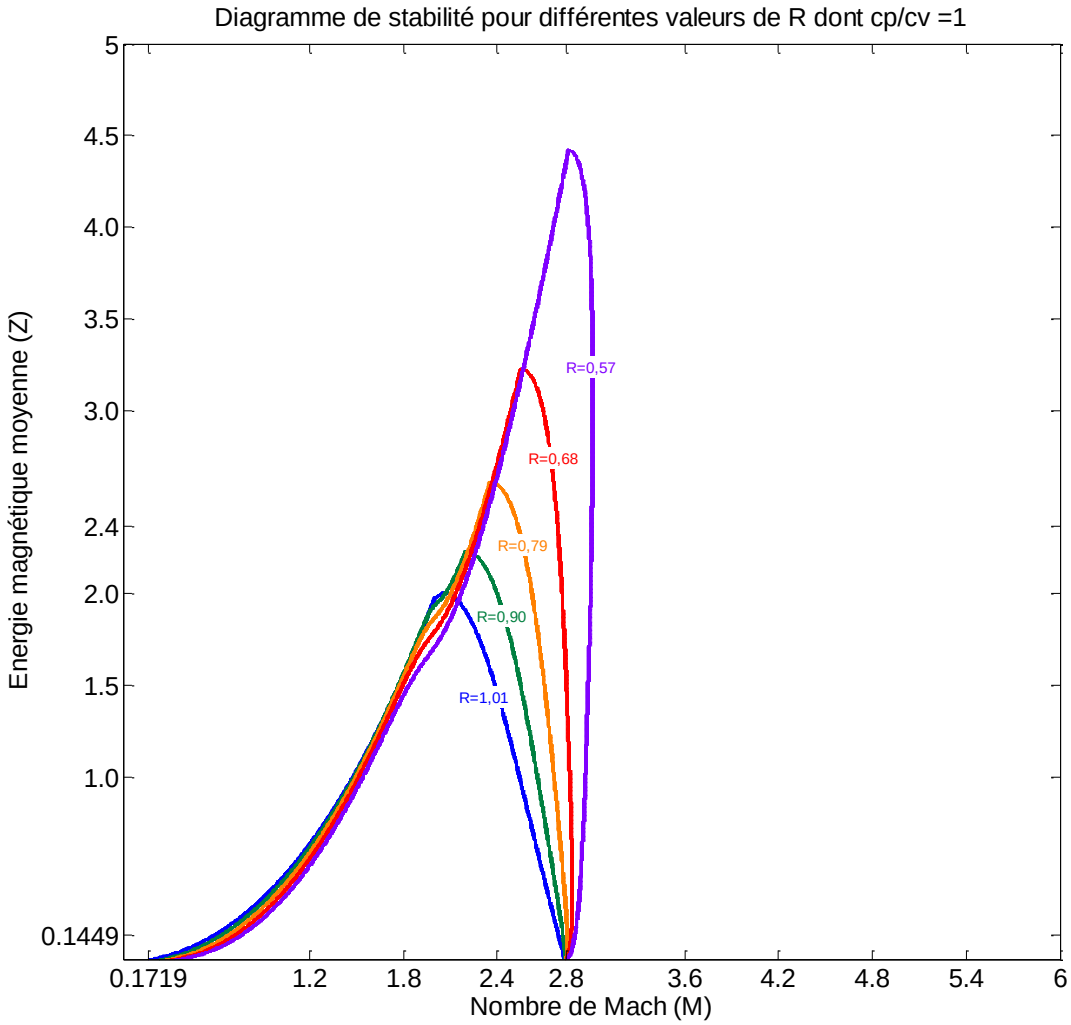

Figure 42 – Evolution de la courbe de stabilité marginale en fonction de R.

En plus de la diminution de l'instabilité au fur et à mesure que l'intensité de la nappe de courant diminue, soit R croissant et ceci pour les valeurs de l'énergie magnétique moyenne élévées, nous constatons que ces courbes marginales sont caractérisées par un premier seuil critique qui converge vers un nombre de Mach zéro, $\left(M=0\right)$, en fonction de R croissant, contrairement, au deuxième seuil critique, qui lui ne change

pas et reste égale à $M_{critique} = \sqrt{8}$. On note toujours que M est bornée entre M_1 variable et M_2 invariable.

Aussi, on constate que la variation du maximum de l'énergie magnétique moyenne diminue notablement lorsque le rapport des deux champs magnétiques R augmente, en l'occurrence, lorsque l'intensité de la nappe de courant diminue (Tableau 3). Confirmant, ainsi, l'effet stabilisant de l'énergie magnétique moyenne sur la nappe de vortex.

R	$\mathbf{Z_{max}}$ (Nombre d'Alfvén)
0.57	4.4
0.68	3.2
0.79	2.6
0.90	2.2
1.0	2.1

Tableau 3 – Relevé des valeurs des $\mathbf{Z_{max}}$.

Comme, nous apercevons que le fait d'augmenter le rapport des deux champs magnétiques $R = B_1^2 / B_2^2$ et $R \to 1$ jusqu'à égalisation des champs, leurs contributions s'ajoutent. A ce stade, $R = 1$, ils ont pour conséquence de stabiliser sensiblement l'onde K-H.

Pour terminer, une petite élévation ou sailli arrondie qu'on peut définir par une variation locale et qui apparait dans les différentes courbes marginales correspondantes à : $0 \leq R \leq 1$, est aussi observée.

4.3 Conclusion

La stabilité d'une nappe de vortex dans un fluide compressible, parfaitement conducteur, de deux côtés où la vitesse du fluide et le champ magnétique sont parallèles, dépend de l'énergie magnétique moyenne et de l'intensité de la nappe de courant en fonction de l'écart du champ magnétique imposé au voisinage de la nappe de vorticité, ou nous concluons :

- L'influence déstabilisante d'une nappe de courant sur la nappe de vorticité.
- L'influence stabilisante d'une énergie magnétique moyenne sur la nappe de vorticité.

Conclusion Générale

Le travail exposé dans ce manuscrit a mis en évidence l'intérêt à développer des théories magnétohydrodynamiques des plasmas qui permettent de comprendre les phénomènes éruptifs, coïncidant avec le maximum d'activité solaire, ainsi que le mécanisme des transitoires coronaux.

Dans cette étude, on s'est basé essentiellement sur l'approximation d'une seule interface plane modélisant le bord de la tache solaire, afin de pouvoir étudier les variations du milieu et d'analyser l'instabilité de la discontinuité hydromagnétique séparant la tache solaire de son milieu photosphérique.

En particulier, l'analyse de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz dans les conditions de la physique solaire apparait fondamentale du fait, qu'elle génère des ondes magnétoacoustiques secondaires et une microturbulence, pouvant être un des mécanismes à l'origine du chauffage de la couronne.

Dès lors, l'approche de la stabilité des systèmes MHD parfaits où le cas d'une structure MHD de la photosphère est prise, comme exemple, pour préciser l'évolution du mouvement et l'effet de la nappe de courant sur la nappe de vorticité.

Également, on a examiné ses conséquences sur la stabilité au voisinage du bord de la tache solaire, en vue de définir dans quel domaine de paramètres cet équilibre peut subsister.

C'est dans ce contexte que l'on a proposé une théorie linéaire de la stabilité au voisinage de l'état d'équilibre du plasma MHD. Ceci consiste précisément à établir les conditions pour lesquelles cette structure peut être stable ou instable vis-à-vis de l'instabilité K-H évoluant autour de l'état stationnaire du plasma.

La résolution du problème de la stabilité du plasma MHD, à l'aide de la méthode des modes normaux, conduit à un problème aux valeurs propres qui se traduit par l'établissement d'une relation de dispersion caractérisant les propriétés des ondes hydromagnétiques de surface.

L'exploitation de ce résultat permet de tirer deux conséquences importantes :

- Une nappe de vorticité oscillant autour de son équilibre entraine que l'intensité de la nappe de courant est croissante entrainant ainsi des fluctuations du milieu

autour de son état d'équilibre. Le milieu est instable et on parle alors de sur-stabilité.

- On note également que, pour une intensité de la nappe de courant donnée, à mesure que l'énergie magnétique moyenne augmente, il y a décroissance des solutions définies comme surstables lorsque le nombre de Mach augmente jusqu'à un seuil critique $M_{critique} = \sqrt{8}$. Ceci confirme l'effet stabilisant du champ magnétique lorsque l'intensité du courant diminue.

Par ailleurs, on peut signaler que les travaux de Rae (1983) ont abouti à la même observation en ce qui concerne l'influence déstabilisante de l'intensité du courant sur la nappe de vorticité, mais avec des courbes de stabilité marginales qualitativement équivalentes. En effet, selon Rae, l'évolution de la courbe de stabilité marginale est différente avec un intervalle du nombre de Mach aussi différent pour une intensité de courant donnée.

L'interprétation de ces résultats conduit à la mise en application du processus lié à l'activité solaire pour décrire l'éruption et les mécanismes transitoires coronaux, et dont la conséquence principale conduit au déclenchement du vent solaire qui se propage dans le milieu interplanétaire.

Finalement, ce travail gagnerait à être prolongé en vue d'effectuer l'analyse de l'activité solaire et son impact sur l'atmosphère terrestre afin de mieux comprendre l'interaction Soleil-Terre qui peut contribuer à une meilleure connaissance des phénomènes géomagnétique et ionosphérique.

Annexe A.
L'étude des instabilités linéaires

A.1. Définition de la stabilité

Avant tout, il est nécessaire de définir de façon explicite la notion de stabilité dynamique d'un système physique. Par stabilité en entend la capacité d'un système à rester dans un état d'équilibre – tel que la somme des forces qu'il subit reste nulle – compte tenu des fluctuations infimes des grandeurs physiques le caractérisant. Lorsqu'on écarte un système de sa position d'équilibre, sous l'effet d'une force de rappel il peut tendre naturellement à regagner sa position d'équilibre à moins qu'un mécanisme quelconque ne le pousse à s'en éloigner. Dans le premier cas on parlera d'un système stable tandis que le second sera dit instable. Bien entendu un système ne peut être considéré comme stable s'il est vis-à-vis de toutes les formes possibles de perturbations.

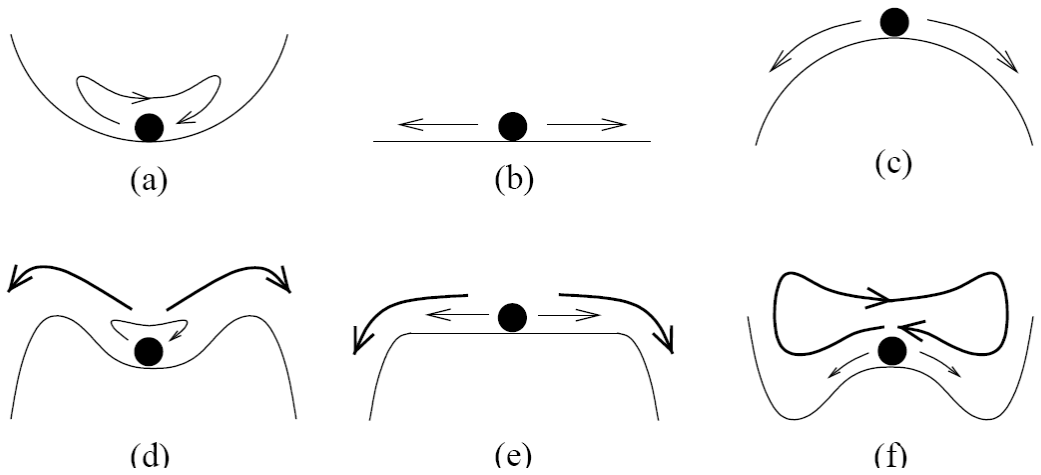

Figure 43 – Analogie mécanique des mécanismes d'instabilité.

Le schéma le plus couramment utilisé pour introduire la notion de stabilité est celui présenté sur la figure où une boule soumise à un champ gravitationnel vertical est placée sur une surface successivement concave puis convexe. La figure (a) décrit un système linéairement stable ; en l'absence de dissipation – à énergie mécanique constante – si l'on déplace de manière infinitésimale la boule depuis son point

d'équilibre elle oscillera ensuite indéfiniment autour de cette position. Dans le cas où une force de frottement agit sur la boule, ces oscillations sont amorties. En revanche, la figure (c) montre qu'un écart initial à la position d'équilibre de la boule va aller en s'accentuant – qu'il y'ait ou non de la dissipation ; le système est alors linéairement instable. La transition entre ces deux régimes, représentée sur la figure (b), constitue le domaine de stabilité marginale. La somme des forces agissant sur le mobile est alors identiquement nulle, mais il est évident qu'une légère modification des caractéristiques physiques du système va provoquer son passage dans l'un ou l'autre des régimes de stabilité ou d'instabilité.

Afin d'avoir un aperçu sur le développement futur d'une instabilité linéaire, il est fondamental de s'intéresser à la réponse du système non plus à des perturbations infinitésimales mais d'amplitude finie, c'est-à-dire à des fluctuations dont l'amplitude est du même ordre de grandeur que les quantités d'équilibre. La figure présente trois cas particuliers de comportement non linéaire. Sur la figure (d) nous voyons que la boule est stable vis-à-vis de petites perturbations de sa position (stabilité linéaire) mais est instable lorsque elles deviennent fortes (instabilité non linéaire). En revanche, sur la figure (f), nous remarquons un comportement inverse du système (instabilité linéaire mais stabilité non linéaire). La figure (e) montre le cas d'un système métastable : vis-à-vis de perturbations infinitésimales il est marginalement stable, en revanche lorsque l'on entre dans le régime non linéaire et que le déplacement de la boule par rapport à l'équilibre devient important le système est instable.

Nous avons précédemment expliqué qu'un système physique est stable lorsque la force de rappel qui tend à le ramener à l'équilibre est suffisamment forte pour contrebalancer l'effet d'un mécanisme déstabilisant quelconque. En l'absence de dissipation, le système se met alors à osciller autour de son équilibre. Il se peut toutefois que cette force de rappel soit trop importante et provoque, effectivement, des fluctuations du milieu autour de son état d'équilibre mais cela avec une amplitude croissante dans le temps. Le milieu est instable et on parle alors de sur – stabilité.

Une fois défini le concept de stabilité dynamique d'un système physique nous allons présenter l'outillage mathématique permettant de décrire puis d'étudier les mécanismes de déstabilisation.

A.2. Linéarisation des équations

Les méthodes développées dans l'étude théorique de la stabilité linéaire hydromagnétique de Kelvin-Helmholtz se fondent sur l'hypothèse de perturbations

infinitésimales d'un état stationnaire du plasma ; par cela on entend qu'elles restent très petites devant les grandeurs physiques propres de l'équilibre. Les quantités auxquelles nous nous intéressons s'écrivent comme :

$$\mathrm{x}\left(\vec{r},t\right) = X_r\left(\vec{r}\right) + x\left(\vec{r},t\right) \tag{A.1}$$

où $X_r\left(\vec{r}\right)$ est la valeur d'équilibre, par définition indépendante du temps, de la grandeur physique x et $x\left(\vec{r},t\right)$ sa fluctuation. Nous supposons de plus :

$$\left|\frac{x}{X_r}\right| \ll 1.$$

Dans ce cadre de travail nous pouvons effectuer la linéarisation des équations d'évolution du plasma. Cette opération consiste à substituer (A.1) dans les équations pertinentes puis à négliger devant les termes linéaires tous les produits et toutes les élévations à des puissances plus grandes que l'unité des écarts x à la solution stationnaire. Cette méthode est appliquée lors du calcul des équations de dispersion des ondes MHD linéaires.

A.3. les ondes dans une atmosphère en mouvement en équilibre, et brusquement structurée.

A.3.1. Influence d'un équilibre en mouvement sur la linéarisation des équations de la MHD

Afin d'étudier le comportement des ondes dans une atmosphère structurée latéralement, nous nous somme intéressés à l'effet de la structuration magnétique sur la propagation des ondes dans un plasma compressible, non visqueux, et parfaitement conducteur où nous ignorons l'effet de la gravité. Nous supposons que l'état de base du plasma est imprégné par un champ magnétique non homogène, $B_r\left(x\right)\vec{e}_z$, et, est en mouvement avec une vitesse $V_r(x)\vec{e}_z$, où $x, y, z,$ dénotent les coordonnées cartésiennes habituelles.

Dans notre étude, nous examinons le comportement des modes dans une atmosphère brusquement structurée, surgissant lorsque le champ magnétique change de façon discontinue (ou, au moins, rapidement), à un certain endroit spatial, et qui est en mouvement en équilibre. Deux exemples d'une telle structuration sont : une seule interface, et le Slab magnétique isolé. Le cas d'une seule interface a été considéré car il exhibe clairement, en l'occurrence, les modes de Surface.

Nous nous sommes intéressés, par conséquence, au comportement des modes dans un milieu où la non-uniformité prend la forme d'une seule interface magnétique, le champ magnétique étant uniforme mais de grandeur différente de part et d'autre de l'interface.

L'état de base du plasma, en mouvement, est justement décris par cette variation discontinue du champ magnétique et de champ de vitesse correspondant à la configuration d'une seule nappe de « Vorticité-Courant », de sorte que :

$$\vec{B}_r,\ \vec{V}_r,\ p_r,\ \rho_r = \begin{cases} \vec{B}_1,\ \vec{V}_1,\ p_1,\ \rho_1, & x < 0, \\ \vec{B}_2,\ \vec{V}_2,\ p_2,\ \rho_2, & x > 0, \end{cases} \tag{A.2}$$

avec, r prenant les valeurs $1, et\ 2$ car les variables à l'équilibre, sont notés (1) dans le premier milieu et (2) dans le deuxième milieu, séparés, respectivement, par la discontinuité plane unique qu'on surnomme nappe de « Vorticité-Courant ».

Les grandeurs physiques $\vec{B}_1,\ \vec{B}_2,\ \vec{V}_1,\ \vec{V}_2,\ P_1,\ P_2,\ \rho_1,\ \rho_2,$ sont toutes constantes et la continuité de la pression totale (gaz + magnétique), soit $\frac{d}{dx}\left(p_r + \frac{B_r^2}{2\mu}\right) = 0,$ en équilibre serait :

$$p_1 + \frac{B_1^2}{2\mu} = p_2 + \frac{B_2^2}{2\mu} \quad ou \quad \rho_1\left(c_1^2 + \frac{\gamma}{2}v_{A1}^2\right) = \rho_2\left(c_2^2 + \frac{\gamma}{2}v_{A2}^2\right), \tag{A.3}$$

où $v_{Ar} = v_{Ar}/\left(\mu\rho_r\right)^{1/2},\ \left(r = 1,2\right),$ est la vitesse d'Alfvén et $c_r = \left(\gamma p_r/\rho_r\right)^{1/2}$ est la vitesse sonore.

Les perturbations linéaires autour de cet état d'équilibre, en mouvement, peuvent être décrites par le même ensemble des équations de continuité, de mouvement, d'induction, et l'équation d'énergie pour des perturbations isentropiques, pour les deux régions, respectives, $r = \left(1,\ 2\right)$:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \left(\vec{V}_r \cdot \vec{\nabla}\right)\rho\right) = -\ \rho_r\ div\left(\vec{v}\right), \tag{A.4}$$

$$\rho_r\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{V}_r \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}\left(p + \frac{1}{\mu}\vec{B}_r \cdot \vec{b}\right) + \frac{1}{\mu}\left(\vec{B}_r \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{b} + \frac{1}{\mu}\left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B}_r, \tag{A.5}$$

$$\left(\frac{\partial\vec{b}}{\partial t} + \left(\vec{V}_r \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{b}\right) = \vec{\nabla}\Lambda\left(\vec{v}\Lambda\vec{B}_r\right), \tag{A.6}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \left(\vec{V}_r \cdot \vec{\nabla}\right)p\right) = c_r^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \left(\vec{V}_r \cdot \vec{\nabla}\right)\rho\right), \tag{A.7}$$

où $\rho, p, \vec{v}$, *et* $\vec{b}\left(satisfaisant\ div\vec{b}=0\right)$ sont les perturbations dans la densité, la pression, la vitesse, et le champ d'induction, respectivement. La vitesse sonore dans l'état de base est $c_r\left(x\right)=\left(\gamma p_r/\rho_r\right)^{1/2}$, où γ est le rapport des chaleurs spécifiques.

Il est commode d'introduire les variables

$$\Delta = div\vec{v}, \quad \Gamma = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad p_T = p + \frac{B_r}{\mu} b_z, \tag{A.8}$$

où $\vec{v}=\left(v_x, v_y, v_z\right)$, et $\vec{b}=\left(b_x, b_y, b_z\right)$.

Les équations (A.2), (A.7) peuvent, par conséquent, être utilisés pour montrer, respectivement, que :

L'équation d'induction se développe selon (A.6) comme:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial b_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial b_x}{\partial z} = B_r \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial b_y}{\partial t} + V_r \frac{\partial b_y}{\partial z} = B_r \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ &\text{et } \frac{\partial b_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial b_z}{\partial z} = \left(B_r\left(\Gamma - \Delta\right) - \left(\frac{dB_r}{dx}\right) v_x\right), \end{aligned} \tag{A.9}$$

où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial b_z}{\partial z} &= \left(-B_r\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) - \left(\frac{dB_r}{dx}\right) v_x\right) \\ &= \left(-B_r\left(\Delta - \Gamma\right) - \left(\frac{dB_r}{dx}\right) v_x\right) \\ &= \left(B_r\left(\Gamma - \Delta\right) - \left(\frac{dB_r}{dx}\right) v_x\right). \end{aligned}$$

L'équation de conservation de l'énergie se développe selon (A.7) comme :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(p_T - \frac{B_r}{\mu} b_z\right) + V_r \frac{\partial}{\partial z}\left(p_T - \frac{B_r}{\mu} b_z\right) = -\rho_r c_r^2 \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right), \\ &\left(\frac{\partial p_T}{\partial t} - \frac{B_r}{\mu}\frac{\partial b_z}{\partial t}\right) + V_r\left(\frac{\partial p_T}{\partial z} - \frac{B_r}{\mu}\frac{\partial b_z}{\partial z}\right) = -\rho_r c_r^2 \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right), \\ &\left(\frac{\partial p_T}{\partial T} + V_r \frac{\partial p_T}{\partial z}\right) - \frac{B_r}{\mu}\left(\frac{\partial b_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial b_z}{\partial z}\right) = -\rho_r c_r^2 \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right), \\ &\left(\frac{\partial p_T}{\partial T} + V_r \frac{\partial p_T}{\partial z}\right) - \frac{B_r}{\mu}\frac{db_z}{dt} = -\rho_r c_r^2 \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right), \end{aligned}$$

avec $p = p_T - \frac{B_r b_z}{\mu}$, et l'équation de conservation de la masse qui donne : $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_r \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = -\rho_r \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right) = -\rho_r \left(\Delta\right)$.

Aussi, on remplaçant par la composante de l'équation d'induction selon la direction $o\vec{z}$, en l'occurrence : $\frac{db_z}{dt} = \left(\frac{\partial b_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial b_z}{\partial z}\right) = B_r \left(\Gamma - \Delta\right)$, on obtient :

$$\left(\frac{\partial p_T}{\partial T} + V_r \frac{\partial p_T}{\partial z}\right) - \frac{B_r}{\mu}\left(B_r \left(\Gamma - \Delta\right)\right) = -\rho_r c_r^2 \Delta,$$
$$\left(\frac{\partial p_T}{\partial T} + V_r \frac{\partial p_T}{\partial z}\right) = -\frac{B_r^2}{\mu}\Delta - \rho_r c_r^2 \Delta + \frac{B_r^2}{\mu}\Gamma,$$
$$\left(\frac{\partial p_T}{\partial T} + V_r \frac{\partial p_T}{\partial z}\right) = \frac{B_r^2}{\mu}\Gamma - \rho_r \left(\frac{B_r^2}{\mu \rho_r} + c_r^2\right)\Delta \ ,$$
$$\left(\frac{\partial p_T}{\partial T} + V_r \frac{\partial p_T}{\partial z}\right) = \frac{B_r^2}{\mu}\Gamma - \rho_r \left(v_{Ar}^2 + c_r^2\right)\Delta \ ,$$

Afin d'avoir l'expression de l'équation de conservation de l'énergie suivante:

$$\left(\frac{\partial p_T}{\partial T} + V_r \frac{\partial p_T}{\partial z}\right) = \rho_r v_{Ar}^2 \Gamma - \rho_r \left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right)\Delta \ , \tag{A.10}$$

Avec, $v_{Ar}\left(x\right) = \left(B_r^2 / \mu \rho_r\right)^{1/2}$ est la vitesse d'Alfvén.

Quand aux composantes de l'équation de quantité de mouvement (A.5), après l'avoir dérivée par rapport au temps et l'avoir projetée dans les trois directions, respectives, $x, y,$ *et* z, sont données comme suit :

- Selon la direction $o\vec{x}$

$$\rho_r \frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dp}{dt} + \frac{B_r}{\mu}\frac{db_z}{dt}\right) + \frac{B_r}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{db_x}{dt}\right),$$
$$\rho_r \frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dp_T}{dt}\right) + \frac{B_r}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{db_x}{dt}\right),$$

- Selon la direction $o\vec{y}$

$$\rho_r \frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dp}{dt} + \frac{B_r}{\mu}\frac{db_z}{dt}\right) + \frac{B_r}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{db_y}{dt}\right),$$
$$\rho_r \frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dp_T}{dt}\right) + \frac{B_r}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{db_y}{dt}\right),$$

- selon la direction $o\vec{z}$

$$\rho_{\mathrm{r}}\frac{d^2v_z}{dt^2}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dp}{dt}+\frac{B_r}{\mu}\frac{db_z}{dt}\right)+\frac{B_r}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{db_z}{dt}\right)+\frac{1}{\mu}\left(\frac{d}{dt}\left(b_x\frac{\partial}{\partial x}+b_y\frac{\partial}{\partial y}+b_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\right)B_r,$$
$$\rho_{\mathrm{r}}\frac{d^2v_z}{dt^2}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dp_T}{dt}\right)+\frac{B_r}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{db_z}{dt}\right)+\frac{1}{\mu}\left(\frac{d}{dt}\left(b_x\frac{\partial B_r}{\partial x}\right)\right),$$
$$\rho_{\mathrm{r}}\frac{d^2v_z}{dt^2}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dp_T}{dt}\right)+\frac{B_r}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{db_z}{dt}\right)+\frac{1}{\mu}\left(\frac{db_x}{dt}\left(\frac{\partial B_r}{\partial x}\right)\right),$$
$$\rho_{\mathrm{r}}\frac{d^2v_z}{dt^2}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dp_T}{dt}\right)+\frac{B_r}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{db_z}{dt}\right)+\frac{1}{\mu}\left(\frac{db_x}{dt}\left(\frac{dB_r}{dx}\right)\right),$$

et en remplaçant par la relation (A.10) donnant l'expression de la pression totale et la relation (A.9) exprimant les composantes de l'équation d'induction dans les trois directions, $x, y,$ *et* $z,$ respectivement, on a :

$$\rho_{\mathrm{r}}\left(\frac{d^2v_x}{dt^2}-v_{Ar}^2\frac{\partial^2v_x}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_r\left(v_{Ar}^2+c_r^2\right)\Delta-\rho_r v_{Ar}^2\Gamma\right),$$
$$\rho_{\mathrm{r}}\left(\frac{d^2v_y}{dt^2}-v_{Ar}^2\frac{\partial^2v_y}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_r\left(v_{Ar}^2+c_r^2\right)\Delta-\rho_r v_{Ar}^2\Gamma\right),$$

et

$$\frac{d^2v_z}{dt^2}=c_r^2\frac{\partial\Delta}{\partial z}.$$

En développant la dérivée totale au carré par rapport au temps, à savoir :

$$\frac{d^2}{dt^2}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+V_r\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+V_r\frac{\partial}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\ V_r\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}+V_r^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

On aura l'ensemble des composantes de l'équation de quantité de mouvement pour un équilibre en mouvement comme suit :

$$\begin{cases}\rho_r\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2V_r\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}+\left(V_r^2-v_{Ar}^2\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_r\left(v_{Ar}^2+c_r^2\right)\Delta-\rho_r v_{Ar}^2\Gamma\right),\\ \rho_r\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2V_r\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}+\left(V_r^2-v_{Ar}^2\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_r\left(v_{Ar}^2+c_r^2\right)\Delta-\rho_r v_{Ar}^2\Gamma\right),\\ \rho_r\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2V_r\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}+V_r^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_z=c_r^2\frac{\partial\Delta}{\partial z}.\end{cases}\tag{A.11}$$

A ce stade, le système d'équations est un système linéaire à coefficients constants et peut être résolu par une décomposition en mode de Fourier de la forme :

$$v_x = \hat{v}_x^r\left(x\right)e^{i\left(ly+kz-\omega t\right)},\ p = \hat{p}^r\left(x\right)e^{i\left(ly+kz-\omega t\right)},\ \text{etc.}$$

où l'utilisation de la notation chapeau dénote que les amplitudes des perturbations dépendent de la variable x.

Après quelques calcules algébriques, le système d'équations peut être réduit à une simple équation différentielle ordinaire de $\hat{v}_x^r\left(x\right)$, en résolvant dans (A.11) $\hat{v}_y^r$ et $\hat{v}_z^r$ en fonction de $\hat{v}_x^r$, compte tenu de

$$\Delta = div\vec{v} = \left(\frac{d\hat{v}_x^r\left(x\right)}{dx} + \left(il\right)\hat{v}_y^r\left(x\right) + \left(ik\right)\hat{v}_z^r\left(x\right)\right)e^{i\left(ly+kz-\omega t\right)}, \tag{A.12}$$

et de

$$\Gamma = \frac{\partial v_z}{\partial z} = \left(ik\right)\hat{v}_z^r\left(x\right)e^{i\left(ly+kz-\omega t\right)}. \tag{A.13}$$

Les deux dernières équations de (A.11) aboutissent ainsi au système

$$\begin{cases} \left[\left(k^2v_{Ar}^2 - \left(\omega - V_rk\right)^2\right) + \left(l^2\left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right)\right)\right]\hat{v}_y^r\left(x\right) + \left[c_r^2kl\right]\hat{v}_z^r\left(x\right) = \left[\left(il\right)\left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right)\right]\dfrac{d\hat{v}_x^r}{dx}, \\ \left[c_r^2kl\right]\hat{v}_y^r\left(x\right) + \left[k^2c_r^2 - \left(\omega - V_rk\right)^2\right]\hat{v}_z^r\left(x\right) = \left[ikc_r^2\right]\dfrac{d\hat{v}_x^r}{dx}, \end{cases} \tag{A.14}$$

dont la solution est :

$$\left.\begin{aligned}
\hat{v}_y^r\left(x\right) &= \frac{\left(il\right)\left[\left(k^2c_r^4\right) - \left(k^2c_r^2 - \left(\underbrace{\omega - V_rk}_{\omega'}\right)^2\right)\left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right)\right]\dfrac{d\hat{v}_x^r}{dx}}{l^2\left[k^2c_r^4 - \left(k^2c_r^2 - \left(\underbrace{\omega - V_rk}_{\omega'}\right)^2\right)\left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right)\right] - \left[\left(k^2c_r^2 - \left(\underbrace{\omega - V_rk}_{\omega'}\right)^2\right)\left(k^2v_{Ar}^2 - \left(\underbrace{\omega - V_rk}_{\omega'}\right)^2\right)\right]}, \\
\hat{v}_z^r\left(x\right) &= \frac{-\left(ikc_r^2\right)\left[k^2v_{Ar}^2 - \left(\underbrace{\omega - V_rk}_{\omega'}\right)^2\right]\dfrac{d\hat{v}_x^r}{dx}}{l^2\left[k^2c_r^4 - \left(k^2c_r^2 - \left(\underbrace{\omega - V_rk}_{\omega'}\right)^2\right)\left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right)\right] - \left[\left(k^2c_r^2 - \left(\underbrace{\omega - V_rk}_{\omega'}\right)^2\right)\left(k^2v_{Ar}^2 - \left(\underbrace{\omega - V_rk}_{\omega'}\right)^2\right)\right]}, \\
\text{determinant} &= k^2l^2c_r^4 - \left(k^2c_r^2 - \left(\underbrace{\omega - V_rk}_{\omega'}\right)^2\right)\left[l^2\left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right) + \left(k^2v_{Ar}^2 - \left(\underbrace{\omega - V_rk}_{\omega'}\right)^2\right)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{A.15}$$

Reportant (A.15) dans la première équation de (A.11), on obtient

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\rho_r\left(x\right)\left(k^2v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left[k^2c_r^4\left(x\right)-\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)\left(k^2c_r^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\right]\cdot\frac{d\hat{v}_x^r\left(x\right)}{dx}}{l^2k^2c_r^4\left(x\right)-\left(k^2c_r^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(l^2\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)+\left(k^2v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\right)}\right)$$
$$-\rho_r\left(x\right)\left(k^2v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\hat{v}_x^r\left(x\right)=0,$$

(A.16)

On peut remanier cette équation selon différentes formes, par exemple, le dénominateur c'est-à-dire le déterminant pour isoler le terme en l^2

$$\text{determinant}=l^2k^2c_r^4\left(x\right)-\left(k^2c_r^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left[l^2\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)+\left(k^2v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\right],$$
$$\text{determinant}=l^2k^2c_r^4\left(x\right)-l^2\left(k^2c_r^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)$$
$$-\left(k^2c_r^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(k^2v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right),$$
$$\text{determinant}=l^2k^2c_r^4\left(x\right)-\left(k^2c_r^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left[l^2\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)+\left(k^2v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\right],$$
$$\text{determinant}=l^2k^2c_r^4\left(x\right)-l^2\left(k^2c_r^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)$$
$$-\left(k^2c_r^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(k^2v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right),$$
$$\text{determinant}=-l^2\left(k^2c_r^2\left(x\right)v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2c_r^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2v_{Ar}^2\left(x\right)\right)$$
$$-\left(k^2c_r^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(k^2v_{Ar}^2\left(x\right)-\right)\left(k^2v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right),$$
$$\text{determinant}=-l^2k^2c_r^2\left(x\right)v_{Ar}^2\left(x\right)+l^2\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)\left(\omega-V_rk\right)^2$$
$$-\left(k^2c_r^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(k^2v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right),$$
$$\text{determinant}=-l^2\left(k^2c_r^2\left(x\right)v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)\left(\omega-V_rk\right)^2\right)$$
$$-\left(k^2c_r^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(k^2v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right),$$
$$\text{determinant}=-l^2\left(k^2\left(\frac{c_r^2\left(x\right)v_{Ar}^2\left(x\right)}{\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)}\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)$$
$$-\left(k^2c_r^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(k^2v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right),$$

$$\text{determinant} = -l^2\left(k^2c_T^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)$$
$$-\left(k^2c_r^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(k^2v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right),$$
$$\text{determinant} = -\left(k^2c_T^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)$$
$$\left(l^2+\frac{\left(k^2c_r^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(k^2v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)}{\left(k^2c_T^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)}\right),$$
$$\text{determinant} = -\left(k^2c_T^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)\left(l^2+m_r^2\left(\omega,k,x\right)\right),$$

$$\text{avec } c_{Tr}^2\left(x\right)=\frac{c_r^2\left(x\right)v_{Ar}^2\left(x\right)}{\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)},$$

$$\text{et } m_r^2\left(\omega,k,x\right)=\frac{\left(k^2c_r^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(k^2v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)}{\left(k^2c_{Tr}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)}. \tag{A.17}$$

Par conséquent, le déterminant se réduit à

$$\text{determinant} = -\left(k^2c_{Tr}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)\left(l^2+m_r^2\left(\omega,k,x\right)\right), \tag{A.18}$$

et l'équation (A.16) se réécrit comme :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\rho_r\left(x\right)\left(k^2v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\begin{pmatrix}k^2c_r^4\left(x\right)-k^2c_r^2\left(x\right)\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)\\+\left(\omega-V_rk\right)^2\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)\end{pmatrix}}{-\left(k^2c_{Tr}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)\left(l^2+m_r^2\left(\omega,k,x\right)\right)}\frac{d\hat{v}_x^r\left(x\right)}{dx}\right)$$
$$-\rho_r\left(x\right)\left(k^2v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\hat{v}_x^r\left(x\right)=0,$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\rho_r\left(x\right)\left(k^2v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\begin{pmatrix}k^2c_r^4\left(x\right)-k^2c_r^4\left(x\right)-k^2c_r^2\left(x\right)v_{Ar}^2\left(x\right)\\+\left(\omega-V_rk\right)^2\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)\end{pmatrix}}{-\left(\left(k^2c_{Tr}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)\left(l^2+m_r^2\left(\omega,k,x\right)\right)\right)}\frac{d\hat{v}_x^r\left(x\right)}{dx}\right)$$
$$-\rho_r\left(x\right)\left(k^2v_{Ar}^2\left(x\right)-\left(\omega-V_rk\right)^2\right)\hat{v}_x^r\left(x\right)=0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-\rho_r(x)\left(k^2v_{Ar}^2(x)-(\omega-V_rk)^2\right)\left(k^2c_{Tr}^2(x)-(\omega-V_rk)^2\right)\left(c_r^2(x)+v_{Ar}^2(x)\right)}{-\left(\left(k^2c_{Tr}^2(x)-(\omega-V_rk)^2\right)\left(c_r^2(x)+v_{Ar}^2(x)\right)\left(l^2+m_r^2(\omega,k,x)\right)\right)}\frac{d\hat{v}_x^r(x)}{dx}\right)$$
$$-\rho_r(x)\left(k^2v_{Ar}^2(x)-(\omega-V_rk)^2\right)\hat{v}_x^r(x)=0,$$

l'équation différentielle (A.16), avec tous constants, devient :

$$\left(\frac{\rho_r(x)\left(k^2v_{Ar}^2(x)-(\omega-V_rk)^2\right)}{\left(l^2+m_r^2(\omega,k,x)\right)}\right)\frac{d^2\hat{v}_x^r(x)}{dx^2}-\left(\rho_r(x)\left(k^2v_{Ar}^2(x)-(\omega-V_rk)^2\right)\right)\hat{v}_x^r(x)=0,$$
$$\frac{d^2\hat{v}_x^r(x)}{dx^2}-\left(l^2+m_r^2(\omega,k,x)\right)\hat{v}_x^r(x)=0, \tag{A.19}$$

L'équation (A.19) décrit la nature tridimensionnelle des perturbations isentropiques, dans un milieu non uniforme (en x) et compressible dont la nature de sa solution, dans le cas spécial d'une seule interface, est les ondes MHD de Surface.

Pour une futur référence, il est aussi utile de rappeler que pour un mouvement tridimensionnel $\hat{v}_y^r$ *et* $\frac{d\hat{v}_x^r}{dx}$ sont reliés (A.15) par :

$$\hat{v}_y^r(x)=\frac{il\frac{d\hat{v}_x^r}{dx}}{\left(l^2+m_r^2(\omega,k,x)\right)} \tag{A.20}$$

v_z^r *et* $\frac{d\hat{v}_x^r}{dx}$ par

$$\hat{v}_z^r(x)=\frac{ikc_r^2(x)\left(k^2v_{Ar}^2(x)-(\omega-V_rk)^2\right)\frac{d\hat{v}_x^r}{dx}}{\left(k^2c_{Tr}^2(x)-(\omega-V_rk)^2\right)\left(c_r^2(x)+v_{Ar}^2(x)\right)\left(l^2+m_r^2(\omega,k,x)\right)}, \tag{A.21}$$

et que l'amplitude de la pression totale perturbée (voir (A.10)), peut être développée en fonction de $\frac{d\hat{v}_x^r}{dx}$, pour cela, calculons l'expression de p_T en nous servant de (A.20), (A.21), compte tenu de (A.12) donnant l'expression :

$$\Delta=\frac{d\hat{v}_x^r}{dx}-\left(\frac{l^2}{l^2+m_r^2}\right)\frac{d\hat{v}_x^r}{dx}-\frac{k^2c_r^2\left(k^2v_{Ar}^2-(\omega-V_rk)^2\right)}{\left(k^2c_{Tr}^2-(\omega-V_rk)^2\right)\left(c_r^2+v_{Ar}^2\right)\left(l^2+m_r^2\right)}\frac{d\hat{v}_x^r}{dx}, \tag{A.22}$$

et (A.13)

$$\Gamma = -\frac{k^2 c_r^2 \left(k^2 v_{Ar}^2 - \left(\omega - V_r k\right)^2\right)}{\left(k^2 c_{Tr}^2 - \left(\omega - V_r k\right)^2\right)\left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right)\left(l^2 + m_r^2\right)} \frac{d\hat{v}_x^r}{dx}, \tag{A.23}$$

avec, $p_T = \hat{p}_T^r\left(x\right) e^{i\left(ly + kz - \omega t\right)}$.

L'expression (A.10) de la pression totale donnerait alors :

$$-\left(i\left(\omega - V_r k\right)\right)\hat{p}_T^r\left(x\right) = -\left(\frac{\rho_r k^2 v_{Ar}^2 c_r^2 \left(k^2 v_{Ar}^2 - \left(\omega - V_r k\right)^2\right)}{\left(k^2 c_{Tr}^2 - \left(\omega - V_r k\right)^2\right)\left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right)\left(l^2 + m_r^2\right)}\right)\frac{d\hat{v}_x^r}{dx}$$
$$-\rho_r\left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right)\left[\begin{array}{l}\dfrac{d\hat{v}_x^r}{dx} - \left(\dfrac{l^2}{l^2 + m_r^2}\right)\dfrac{d\hat{v}_x^r}{dx} \\ -\left(\dfrac{k^2 c_r^2 \left(k^2 v_{Ar}^2 - \left(\omega - V_r k\right)^2\right)}{\left(k^2 c_{Tr}^2 - \left(\omega - V_r k\right)^2\right)\left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right)\left(l^2 + m_r^2\right)}\right)\dfrac{d\hat{v}_x^r}{dx}\end{array}\right],$$

$$-\left(i\left(\omega - V_r k\right)\right)\hat{p}_T^r\left(x\right) = -\left(\frac{\rho_r k^2 v_{Ar}^2 c_r^2 \left(k^2 v_{Ar}^2 - \left(\omega - V_r k\right)^2\right)}{\left(k^2 c_{Tr}^2 - \left(\omega - V_r k\right)^2\right)\left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right)\left(l^2 + m_r^2\right)}\right)\frac{d\hat{v}_x^r}{dx}$$
$$+\left[\begin{array}{l}-\left(\rho_r\left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right)\right)\dfrac{d\hat{v}_x^r}{dx} + \left(\dfrac{\rho_r l^2\left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right)}{\left(l^2 + m_r^2\right)}\right)\dfrac{d\hat{v}_x^r}{dx} \\ +\left(\dfrac{\rho_r k^2 c_r^2\left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right)\left(k^2 v_{Ar}^2 - \left(\omega - V_r k\right)^2\right)}{\left(k^2 c_{Tr}^2 - \left(\omega - V_r k\right)^2\right)\left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right)\left(l^2 + m_r^2\right)}\right)\dfrac{d\hat{v}_x^r}{dx}\end{array}\right],$$

$$-\left(i\left(\omega - V_r k\right)\right)\hat{p}_T^r\left(x\right) = -\left(\rho_r\left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right)\right)\frac{d\hat{v}_x^r}{dx} + \frac{\rho_r l^2\left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right)}{\left(l^2 + m_r^2\right)}\frac{d\hat{v}_x^r}{dx}$$
$$+\left(\frac{\rho_r k^2 c_r^4\left(k^2 v_{Ar}^2 - \left(\omega - V_r k\right)^2\right)}{\left(k^2 c_{Tr}^2 - \left(\omega - V_r k\right)^2\right)\left(c_r^2 + v_{Ar}^2\right)\left(l^2 + m_r^2\right)}\right)\frac{d\hat{v}_x^r}{dx},$$

$$-\left(i\left(\omega-V_r k\right)\right)\hat{p}_T^r\left(x\right)=\frac{-\rho_r\left(c_r^2+v_{Ar}^2\right)^2\left(k^2c_{Tr}^2-\left(\omega-V_r k\right)^2\right)m_r^2+\rho_r k^2c_r^4\left(k^2v_{Ar}^2-\left(\omega-V_r k\right)^2\right)}{\left(k^2c_{Tr}^2-\left(\omega-V_r k\right)^2\right)\left(c_r^2+v_{Ar}^2\right)\left(l^2+m_r^2\right)}\frac{d\hat{v}_x^r}{dx},$$

$$=\frac{-\rho_r\left(c_r^2+v_{Ar}^2\right)\left(k^2c_r^2-\left(\omega-V_r k\right)^2\right)\left(k^2v_{Ar}^2-\left(\omega-V_r k\right)^2\right)+\rho_r k^2c_r^4\left(k^2v_{Ar}^2-\left(\omega-V_r k\right)^2\right)}{\left(k^2c_{Tr}^2-\left(\omega-V_r k\right)^2\right)\left(c_r^2+v_{Ar}^2\right)\left(l^2+m_r^2\right)}\frac{d\hat{v}_x^r}{dx},$$

$$=\frac{\rho_r\left(k^2v_{Ar}^2-\left(\omega-V_r k\right)^2\right)\left[-\left(c_r^2+v_{Ar}^2\right)\left(k^2c_r^2-\left(\omega-V_r k\right)^2\right)+k^2c_r^4\right]}{\left(k^2c_{Tr}^2-\left(\omega-V_r k\right)^2\right)\left(c_r^2+v_{Ar}^2\right)\left(l^2+m_r^2\right)}\frac{d\hat{v}_x^r}{dx},$$

$$=\frac{\rho_r\left(k^2v_{Ar}^2-\left(\omega-V_r k\right)^2\right)\left[-\left(k^2c_r^4-\left(\omega-V_r k\right)^2c_r^2+k^2c_r^2v_{Ar}^2-\left(\omega-V_r k\right)^2v_{Ar}^2\right)+k^2c_r^4\right]}{\left(k^2c_{Tr}^2-\left(\omega-V_r k\right)^2\right)\left(c_r^2+v_{Ar}^2\right)\left(l^2+m_r^2\right)}\frac{d\hat{v}_x^r}{dx},$$

$$=\frac{\rho_r\left(k^2v_{Ar}^2-\left(\omega-V_r k\right)^2\right)\left[\left(\omega-V_r k\right)^2\left(c_r^2+v_{Ar}^2\right)-k^2c_r^2v_{Ar}^2\right]}{\left(k^2c_{Tr}^2-\left(\omega-V_r k\right)^2\right)\left(c_r^2+v_{Ar}^2\right)\left(l^2+m_r^2\right)}\frac{d\hat{v}_x^r}{dx},$$

$$où\ \ c_{Tr}^2\left(x\right)=\frac{c_r^2\left(x\right)v_{Ar}^2\left(x\right)}{\left(c_r^2\left(x\right)+v_{Ar}^2\left(x\right)\right)},$$

$$-\left(i\left(\omega-V_r k\right)\right)\hat{p}_T^r\left(x\right)=\frac{-\rho_r\left(k^2v_{Ar}^2-\left(\omega-V_r k\right)^2\right)\left(c_r^2+v_{Ar}^2\right)\left(k^2c_{Tr}^2-\left(\omega-V_r k\right)^2\right)}{\left(k^2c_{Tr}^2-\left(\omega-V_r k\right)^2\right)\left(c_r^2+v_{Ar}^2\right)\left(l^2+m_r^2\left(\omega,k,x\right)\right)}\frac{d\hat{v}_x^r}{dx},$$

$$-\left(i\left(\omega-V_r k\right)\right)\hat{p}_T^r\left(x\right)=-\frac{\rho_r\left(k^2v_{Ar}^2-\left(\omega-V_r k\right)^2\right)}{\left(l^2+m_r^2\left(\omega,k,x\right)\right)}\frac{d\hat{v}_x^r}{dx},$$

et en tenant compte de l'expression de $m_r^2\left(\omega,k,x\right)$ pour (A.17)

$$\hat{p}_T^r\left(x\right)=\frac{\rho_r\left(k^2v_{Ar}^2-\left(\omega-V_r k\right)^2\right)}{\left(i\left(\omega-V_r k\right)\right)\left(l^2+m_r^2\left(\omega,k,x\right)\right)}\frac{d\hat{v}_x^r}{dx}, \tag{A.24}$$

ou

$$\hat{p}_T^r\left(x\right)=-\frac{i\rho_r\left(k^2v_{Ar}^2-\left(\omega-V_r k\right)^2\right)}{\left(\omega-V_r k\right)\left(l^2+m_r^2\left(\omega,k,x\right)\right)}\frac{d\hat{v}_x^r}{dx}. \tag{A.25}$$

Pour avoir la relation de dispersion, il faut examiner pour des valeurs de k *et* l données pour quels ω on peut trouver des solutions non triviales de (A.19) qui

représente donc l'énoncé général du problème des ondes hydrodynamiques en milieu inhomogène.

En supposant que les mouvements sont indépendants de la coordonnée y de sorte que $l=0$, et que le vecteur de propagation est purement dans le plan xz, nous voyons que pour des mouvements bidimensionnels $v=\left(v_x,0,v_z\right)$, l'équation (A.19) se réduit à :

$$\frac{d^2\hat{v}_x^r\left(x\right)}{dx^2}-m_r^2\ \hat{v}_x^r\left(x\right)=0. \tag{A.26}$$

Equation (A.19), et sa réduction (A.26) pour $l=0$, détermine la nature de la propagation des ondes dans une atmosphère brusquement structurée, et en mouvement, pour les régions, $r=1,\ 2,$ respectivement.

Si on suppose en outre que les perturbations sont dans le plan $\left(x,z\right)$, uniquement, l'équation différentielle (A.26) portant sur l'amplitude de la vitesse perturbée $\hat{v}_x^r\left(x\right)$, pour la région r, où $r=\left(1,2\right)$, devient :

$$\frac{d^2\hat{v}_x^r\left(x\right)}{dx^2}-m_r^2\ \hat{v}_x^r\left(x\right)=0. \tag{A.27}$$

Les ondes de Surface doivent leur existence à la discontinuité du champ magnétique et ne peuvent surgir que lorsque $m_1^2\left(\omega,k,x\right)$et $m_2^2\left(\omega,k,x\right)$sont tous les deux positif, avec $r=\left(1,2\right)$.

On recherche alors des solutions de (A.27) pour lesquelles m_1^2 *et* m_2^2 sont positifs, dont l'équation correspondante en $x>0$ *et* $x<0$, pour $\hat{v}_x\left(x\right)$ donne :

$$\hat{v}_x\left(x\right)=\begin{cases}\alpha_2 e^{-m_2 x}, & x>0,\\ \alpha_1 e^{-m_1 x}, & x<0,\end{cases} \tag{A.28}$$

avec $m_1>0,$ *et* $m_2>0.$ En écrivant (A.28), on a imposé la condition de l'amplitude $\hat{v}_x$ qui tend vers zéro pour $x=\pm\infty$. De ce fait, la propagation latérale des ondes est, ainsi, exclu, où seulement les ondes de Surface surgissent.

A.3.2. Calcul de l'équation de dispersion

A travers l'interface $x=0$, le mode doit satisfaire à des conditions de raccord, dont $\hat{v}_x\left(x\right)$ *et* $\hat{p}_x\left(x\right)$ doivent être continus, et qui fixent d'ailleurs la relation de dispersion. Ainsi, la continuité de la composante normale de la vitesse $\hat{v}_x\left(x\right)$, donne :

$$\left[\frac{\hat{v}_x^r}{\left(\omega - V_r k\right)}\right]_1^2 = 0, \text{ impliquant, } \frac{\alpha_1}{\left(\omega - V_1 k\right)} = \frac{\alpha_2}{\left(\omega - V_2 k\right)},$$

lorsque la continuité de la pression totale $\hat{p}_T\left(x\right)$, en $x = 0$ selon (A.24) donne :

$$\left[\frac{\rho_r\left(k^2 v_{Ar}^2 - \left(\omega - V_r k\right)^2\right)}{\left(i\left(\omega - V_r k\right)\right)\left(m_r^2\left(\omega, k, x\right)\right)}\frac{d\hat{v}_x^r}{dx}\right]_1^2 = 0,$$

$$\frac{\rho_1\left(k^2 v_{A1}^2 - \left(\omega - V_1 k\right)^2\right)}{\left(i\left(\omega - V_1 k\right)\right)\left(m_1^2\left(\omega, k, x\right)\right)}\left(\alpha_1\left(m_1\left(\omega, k, x\right)\right)\right) = \frac{\rho_2\left(k^2 v_{A2}^2 - \left(\omega - V_2 k\right)^2\right)}{\left(i\left(\omega - V_2 k\right)\right)\left(m_2^2\left(\omega, k, x\right)\right)}\left(-\alpha_2\left(m_2\left(\omega, k, x\right)\right)\right),$$

$$\frac{\rho_1\alpha_1\left(k^2 v_{A1}^2 - \left(\omega - V_1 k\right)^2\right)}{\left(i\left(\omega - V_1 k\right)\right)\left(m_1\left(\omega, k, x\right)\right)} = -\frac{\rho_2\alpha_2\left(k^2 v_{A2}^2 - \left(\omega - V_2 k\right)^2\right)}{\left(i\left(\omega - V_2 k\right)\right)\left(m_2\left(\omega, k, x\right)\right)},$$

en l'occurrence, l'équation de dispersion des ondes de Surface à une seule interface magnétique :

$$\rho_1\left(k^2 v_{A1}^2 - \left(\omega - V_1 k\right)^2\right)\left(m_2\left(\omega, k, x\right)\right) + \rho_2\left(k^2 v_{A2}^2 - \left(\omega - V_2 k\right)^2\right)\left(m_1\left(\omega, k, x\right)\right) = 0, \tag{A.29}$$

on a écrit

$$m_r^2\left(\omega, k, x\right) = \frac{\left(k^2 c_r^2\left(x\right) - \left(\omega - V_r k\right)^2\right)\left(k^2 v_{Ar}^2\left(x\right) - \left(\omega - V_r k\right)^2\right)}{\left(k^2 c_{Tr}^2\left(x\right) - \left(\omega - V_r k\right)^2\right)\left(c_r^2\left(x\right) + v_{Ar}^2\left(x\right)\right)}, \quad r = 1, 2.$$

En général, la relation de dispersion (A.29) des ondes de Surface sur une seule nappe de Vorticité – Courant, donne un polynôme d'ordre dix de variable ω, qui est évidemment difficile à résoudre.

Il vient que (A.29) peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{\rho_1\left(k^2 v_{A1}^2 - \left(\frac{\omega}{k} - V_1\right)^2 k^2\right)}{\rho_2\left(k^2 v_{A2}^2 - \left(\frac{\omega}{k} - V_2\right)^2 k^2\right)} = -\frac{m_1}{m_2}, \text{ J'élève les deux membres de cette dernière au carré,}$$

on obtient :

$$\frac{\left(\rho_1\right)^2\left(k^2 v_{A1}^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)^2 k^2\right)^2}{\left(\rho_2\right)^2\left(k^2 v_{A2}^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)^2 k^2\right)^2}=\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2,$$

$$\frac{\left(\rho_1\right)^2\left(v_{A1}^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)^2\right)^2\left(k\right)^4}{\left(\rho_2\right)^2\left(v_{A2}^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)^2\right)^2\left(k\right)^4}=\frac{\left(m_1\right)^2}{\left(m_2\right)^2},$$

$$\frac{\left(\rho_1\right)^2\left(v_{A1}^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)^2\right)^2\left(k\right)^4}{\left(\rho_2\right)^2\left(v_{A2}^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)^2\right)^2\left(k\right)^4}=\frac{\frac{\left(c_1^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)^2\right)\left(v_{A1}^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)^2\right)}{\left(c_1^2+v_{A1}^2\right)\left(c_{T1}^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)^2\right)}\left(k\right)^4}{\frac{\left(c_2^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)^2\right)\left(v_{A2}^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)^2\right)}{\left(c_2^2+v_{A2}^2\right)\left(c_{T2}^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)^2\right)}\left(k\right)^4},$$

$$\frac{\left(\rho_1\right)^2\left(v_{A1}^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)^2\right)^2}{\left(\rho_2\right)^2\left(v_{A2}^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)^2\right)^2}=\frac{\left(c_1^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)^2\right)\left(v_{A1}^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)^2\right)}{\left(c_1^2+v_{A1}^2\right)\left(c_{T1}^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)^2\right)}\frac{\left(c_2^2+v_{A2}^2\right)\left(c_{T2}^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)^2\right)}{\left(c_2^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)^2\right)\left(v_{A2}^2-\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)^2\right)},$$

et, en écrivant, $q_1=\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)$, *et* $q_2=\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)$, le développement de l'équation (A.29) est un polynôme de dix (10) degré mais, cette fois-ci, de variable $\frac{\omega}{k}$:

$$\frac{\left(\rho_1\right)^2\left(v_{A1}^2-q_1^2\right)^2}{\left(\rho_2\right)^2\left(v_{A2}^2-q_2^2\right)^2}=\frac{\left(c_1^2-q_1^2\right)\left(v_{A1}^2-q_1^2\right)}{\left(c_1^2+v_{A1}^2\right)\left(c_{T1}^2-q_1^2\right)}\frac{\left(c_2^2+v_{A2}^2\right)\left(c_{T2}^2-q_2^2\right)}{\left(c_2^2-q_2^2\right)\left(v_{A2}^2-q_2^2\right)}, \tag{A.30}$$

et qui, après, quelques simplifications, (A.30) donne à un polynôme de six (6) degré comme suit :

$$\frac{\left(\rho_1\right)^2\left(v_{A1}^2-q_1^2\right)}{\left(\rho_2\right)^2\left(v_{A2}^2-q_2^2\right)}=\frac{\left(c_1^2-q_1^2\right)}{\left(c_1^2+v_{A1}^2\right)\left(c_{T1}^2-q_1^2\right)}\frac{\left(c_2^2+v_{A2}^2\right)\left(c_{T2}^2-q_2^2\right)}{\left(c_2^2-q_2^2\right)}, \tag{A.31}$$

(A.31), se développe :

$$\underbrace{\left(\rho_1\right)^2\left(v_{A1}^2-q_1^2\right)\left(c_1^2+v_{A1}^2\right)\left(c_{T1}^2-q_1^2\right)\left(c_2^2-q_2^2\right)}_{premier\ membre}=\underbrace{\left(\rho_2\right)^2\left(v_{A2}^2-q_2^2\right)\left(c_1^2-q_1^2\right)\left(c_2^2+v_{A2}^2\right)\left(c_{T2}^2-q_2^2\right)}_{deuxiéme\ membre},$$

$$dont\ \begin{cases} premier\ membre = \rho_1^2\left(c_1^2+v_{A1}^2\right)q_1^4q_2^2-\rho_1^2\left(2c_1^2v_{A1}^2+v_{A1}^4\right)q_1^2q_2^2 \\ \qquad +\rho_1^2c_1^2v_{A1}^4q_2^2-\rho_1^2c_2^2\left(c_1^2+v_{A1}^2\right)q_1^4 \\ \qquad +\rho_1^2c_2^2\left(2c_1^2v_{A1}^2+v_{A1}^4\right)q_1^2-\rho_1^2c_1^2c_2^2v_{A1}^4. \\ \\ deuxiéme\ membre = \rho_2^2\left(c_2^2+v_{A2}^2\right)q_1^2q_2^4-\rho_2^2\left(2c_2^2v_{A2}^2+v_{A2}^4\right)q_1^2q_2^2 \\ \qquad +\rho_2^2c_2^2v_{A2}^4q_1^2-\rho_2^2c_1^2\left(c_2^2+v_{A2}^2\right)q_2^4 \\ \qquad +\rho_2^2c_1^2\left(2c_2^2v_{A2}^2+v_{A2}^4\right)q_2^2-\rho_2^2c_1^2c_2^2v_{A2}^4. \end{cases}$$

(A.31) devient :

$$\begin{aligned} &\rho_1^2\left(c_1^2+v_{A1}^2\right)q_1^4q_2^2-\rho_2^2\left(c_2^2+v_{A2}^2\right)q_1^2q_2^4-\rho_1^2\left(2c_1^2v_{A1}^2+v_{A1}^4\right)q_1^2q_2^2+\rho_2^2\left(2c_2^2v_{A2}^2+v_{A2}^4\right)q_1^2q_2^2 \\ &+\rho_1^2c_1^2v_{A1}^4q_2^2-\rho_2^2c_1^2\left(2c_2^2v_{A2}^2+v_{A2}^4\right)q_2^2-\rho_1^2c_2^2\left(c_1^2+v_{A1}^2\right)q_1^4+\rho_2^2c_1^2\left(c_2^2+v_{A2}^2\right)q_2^4 \\ &-\rho_1^2c_1^2c_2^2v_{A1}^4+\rho_2^2c_1^2c_2^2v_{A2}^4+\rho_1^2c_2^2\left(2c_1^2v_{A1}^2+v_{A1}^4\right)q_1^2-\rho_2^2c_2^2v_{A2}^4q_1^2=0. \end{aligned}$$

Par conséquent, la relation de dispersion d'ordre six (6), et de variable $\left(\frac{\omega}{k}\right)$ est :

$$\begin{aligned} &\left(\rho_1^2\left(c_1^2+v_{A1}^2\right)q_1^2-\rho_2^2\left(c_2^2+v_{A2}^2\right)q_2^2\right)q_1^2q_2^2-\left(\rho_1^2\left(2c_1^2v_{A1}^2+v_{A1}^4\right)-\rho_2^2\left(2c_2^2v_{A2}^2+v_{A2}^4\right)\right)q_1^2q_2^2 \\ &+\left(\rho_1^2c_1^2v_{A1}^4-\rho_2^2c_1^2\left(2c_2^2v_{A2}^2+v_{A2}^4\right)\right)q_2^2-\rho_1^2c_2^2\left(c_1^2+v_{A1}^2\right)q_1^4+\rho_2^2c_1^2\left(c_2^2+v_{A2}^2\right)q_2^4 \\ &-\left(\rho_1^2c_1^2c_2^2v_{A1}^4-\rho_2^2c_1^2c_2^2v_{A2}^4\right)+\left(\rho_1^2c_2^2\left(2c_1^2v_{A1}^2+v_{A1}^4\right)-\rho_2^2c_2^2v_{A2}^4\right)q_1^2=0. \end{aligned} \tag{A.32}$$

Cependant, si on suppose que la température soit continue à travers la nappe de Vortex-Courant, en $x=0$, en prenant, $c_1=c_2$, l'équation (A.32) se développe comme :

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\left(\rho_1^2\left(c_1^2+v_{A1}^2\right)q_1^2-\rho_2^2\left(c_1^2+v_{A2}^2\right)q_2^2\right)q_1^2q_2^2}_{\textit{premier}\ \text{terme}}-\underbrace{\left(\rho_1^2v_{A1}^2\left(2c_1^2+v_{A1}^2\right)-\rho_2^2v_{A2}^2\left(2c_1^2+v_{A2}^2\right)\right)q_1^2q_2^2}_{\textit{deuxiéme}\ \text{terme}}\\
&+\underbrace{\rho_2^2c_1^2\left(c_1^2+v_{A2}^2\right)q_2^4}_{\textit{troisiéme}\ \text{terme}}-\underbrace{\rho_1^2c_1^2\left(c_1^2+v_{A1}^2\right)q_1^4}_{\textit{quatriéme terme}}-\underbrace{2\left(\rho_2^2c_1^4v_{A2}^2q_2^2-\rho_1^2c_1^4v_{A1}^2q_1^2\right)}_{\textit{cinquiéme terme}}\\
&-\underbrace{\left(\rho_2^2c_1^2v_{A2}^4-\rho_1^2c_1^2v_{A1}^4\right)q_2^2}_{\textit{sixiéme terme}}-\underbrace{\left(\rho_2^2c_1^2v_{A2}^4-\rho_1^2c_1^2v_{A1}^4\right)q_1^2}_{\textit{septiéme terme}}+\underbrace{\left(\rho_2^2c_1^4v_{A2}^4-\rho_1^2c_1^4v_{A1}^4\right)}_{\textit{huitiéme}\ \text{terme}}=0,
\end{aligned}
\tag{A.33}
$$

dont les termes donne, respectivement,

$$
\begin{cases}
\text{1er terme}=\left(\rho_2^2c_1^8\right)\left[\dfrac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\left(1+\dfrac{v_{A1}^2}{c_1^2}\right)\left(\dfrac{q_1}{c_1}\right)^2-\left(1+\dfrac{v_{A2}^2}{c_1^2}\right)\left(\dfrac{q_2}{c_1}\right)^2\right]\left(\dfrac{q_1}{c_1}\right)^2\left(\dfrac{q_2}{c_1}\right)^2,\\
\text{2éme terme}=\left(\rho_2^2c_1^8\right)\left[\dfrac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\dfrac{v_{A1}^2}{c_1^2}\left(2+\dfrac{v_{A1}^2}{c_1^2}\right)-\dfrac{v_{A2}^2}{c_1^2}\left(2+\dfrac{v_{A2}^2}{c_1^2}\right)\right]\left(\dfrac{q_1}{c_1}\right)^2\left(\dfrac{q_2}{c_1}\right)^2,\\
\text{3éme terme}=\left(\rho_2^2c_1^8\right)\left(1+\dfrac{v_{A2}^2}{c_1^2}\right)\left(\dfrac{q_2}{c_1}\right)^4,\\
\text{4éme terme}=\left(\rho_2^2c_1^8\right)\left(\dfrac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\left(1+\dfrac{v_{A1}^2}{c_1^2}\right)\right)\left(\dfrac{q_1}{c_1}\right)^4,\\
\text{5éme terme}=2\left(\rho_2^2c_1^8\right)\left(\dfrac{v_{A2}^2}{c_1^2}\left(\dfrac{q_2}{c_1}\right)^2-\dfrac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\left(\dfrac{v_{A1}^2}{c_1^2}\right)\left(\dfrac{q_1}{c_1}\right)^2\right),\\
\text{6éme terme}=\left(\rho_2^2c_1^8\right)\left(\dfrac{v_{A2}^4}{c_1^4}-\dfrac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\dfrac{v_{A1}^4}{c_1^4}\right)\left(\dfrac{q_2}{c_1}\right)^2,\\
\text{7éme terme}=\left(\rho_2^2c_1^8\right)\left(\dfrac{v_{A2}^4}{c_1^4}-\dfrac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\dfrac{v_{A1}^4}{c_1^4}\right)\left(\dfrac{q_1}{c_1}\right)^2,\\
\text{8éme terme}=\left(\rho_2^2c_1^8\right)\left(\dfrac{v_{A2}^4}{c_1^4}-\dfrac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\dfrac{v_{A1}^4}{c_1^4}\right),
\end{cases}
$$

en remplaçant dans (A.33), on a

$$
\begin{aligned}
&\left(Q^2\left(1+\beta_1^2\right)\frac{q_1^2}{c_1^2}-\left(1+\beta_2^2\right)\frac{q_2^2}{c_1^2}\right)\frac{q_1^2}{c_1^2}\frac{q_2^2}{c_1^2}-\left(Q^2\beta_1^2\left(2+\beta_1^2\right)-\beta_2^2\left(2+\beta_2^2\right)\right)\frac{q_1^2}{c_1^2}\frac{q_2^2}{c_1^2}\\
&+\left(1+\beta_2^2\right)\frac{q_2^4}{c_1^4}-\left(Q^2\left(1+\beta_1^2\right)\right)\frac{q_1^4}{c_1^4}-2\left(\beta_2^2\frac{q_2^2}{c_1^2}-Q^2\beta_1^2\frac{q_1^2}{c_1^2}\right)-\left(\beta_2^4-Q^2\beta_1^4\right)\frac{q_2^2}{c_1^2}\\
&-\left(\beta_2^4-Q^2\beta_1^4\right)\frac{q_1^2}{c_1^2}+\left(\beta_2^4-Q^2\beta_1^4\right)=0,
\end{aligned}
$$

avec, $q_1=\left(\dfrac{\omega}{k}-V_1\right)$, $q_2=\left(\dfrac{\omega}{k}-V_2\right)$, $Q=\left(\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)$, $\beta_1=\dfrac{v_{A1}}{c_1}$, et $\beta_2=\dfrac{v_{A2}}{c_1}$.

Nous avons, pour des perturbations bidimensionnelles (x,z), se propageant le long des champs non-perturbés, la relation de dispersion suivante :

$$\left(\beta_2^4-\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\beta_1^4\right)\left(1-\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)^2}{c_1^2}-\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)^2}{c_1^2}\right)-2\left(\beta_2^2\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)^2}{c_1^2}-\beta_1^2\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)^2}{c_1^2}\right)$$
$$+\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)^2}{c_1^2}\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)^2}{c_1^2}\left(\beta_2^2\left(2+\beta_2^2\right)-\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\beta_1^2\left(2+\beta_1^2\right)\right)$$
$$+\left(1+\beta_2^2\right)\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)^4}{c_1^4}-\left(\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\left(1+\beta_1^2\right)\right)\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)^4}{c_1^4}$$
$$+\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)^2}{c_1^2}\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)^2}{c_1^2}\left(\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\left(1+\beta_1^2\right)\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_1\right)^2}{c_1^2}-\left(1+\beta_2^2\right)\frac{\left(\frac{\omega}{k}-V_2\right)^2}{c_1^2}\right)=0,$$

et s'écrit :

$$\left(\beta_2^4-\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\beta_1^4\right)\left(1-\left(\frac{\omega}{kc_1}-\frac{V_1}{c_1}\right)^2-\left(\frac{\omega}{kc_2}-\frac{V_2}{c_1}\right)^2\right)-2\left(\beta_2^2\left(\frac{\omega}{kc_1}-\frac{V_2}{c_1}\right)^2-\beta_1^2\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\left(\frac{\omega}{kc_1}-\frac{V_1}{c_1}\right)^2\right)$$
$$+\left(\frac{\omega}{kc_1}-\frac{V_1}{c_1}\right)^2\left(\frac{\omega}{kc_1}-\frac{V_2}{c_1}\right)^2\left(\beta_2^2\left(2+\beta_2^2\right)-\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\beta_1^2\left(2+\beta_1^2\right)\right)$$
$$+\left(1+\beta_2^2\right)\left(\frac{\omega}{kc_1}-\frac{V_2}{c_1}\right)^4-\left(\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\left(1+\beta_1^2\right)\right)\left(\frac{\omega}{kc_1}-\frac{V_1}{c_1}\right)^4$$
$$+\left(\frac{\omega}{kc_1}-\frac{V_1}{c_1}\right)^2\left(\frac{\omega}{kc_1}-\frac{V_2}{c_1}\right)^2\left(\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\left(1+\beta_1^2\right)\left(\frac{\omega}{kc_1}-\frac{V_1}{c_1}\right)^2-\left(1+\beta_2^2\right)\left(\frac{\omega}{kc_1}-\frac{V_2}{c_1}\right)^2\right)=0,$$

Ou

$$
\begin{aligned}
&\left(\beta_2^4-\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\beta_1^4\right)\left(1-\left(\frac{C}{c_1}-\frac{V_1}{c_1}\right)^2-\left(\frac{C}{c_1}-\frac{V_2}{c_1}\right)^2\right)-2\left(\beta_2^2\left(\frac{C}{c_1}-\frac{V_2}{c_1}\right)^2-\beta_1^2\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\left(\frac{C}{c_1}-\frac{V_1}{c_1}\right)^2\right)\\
&+\left(\frac{C}{c_1}-\frac{V_1}{c_1}\right)^2\left(\frac{C}{c_1}-\frac{V_2}{c_1}\right)^2\left(\beta_2^2\left(2+\beta_2^2\right)-\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\beta_1^2\left(2+\beta_1^2\right)\right)\\
&+\left(1+\beta_2^2\right)\left(\frac{C}{c_1}-\frac{V_2}{c_1}\right)^4-\left(\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\left(1+\beta_1^2\right)\right)\left(\frac{C}{c_1}-\frac{V_1}{c_1}\right)^4\\
&+\left(\frac{C}{c_1}-\frac{V_1}{c_1}\right)^2\left(\frac{C}{c_1}-\frac{V_2}{c_1}\right)^2\left(\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\left(1+\beta_1^2\right)\left(\frac{C}{c_1}-\frac{V_1}{c_1}\right)^2-\left(1+\beta_2^2\right)\left(\frac{C}{c_1}-\frac{V_2}{c_1}\right)^2\right)=0
\end{aligned}
\tag{A.34}
$$

où V_1, ρ_1, c_1, *et* β_1 sont la vitesse du fluide non-perturbé, la densité, la vitesse sonore, et la rapport de la vitesse d'Alfvén de l'onde par rapport à la vitesse sonore sur un coté, et V_2, ρ_2, c_2, *et* β_2 sont les mêmes quantités sur l'autre coté de la nappe de Vortex-Courant, avec la même vitesse sonore au niveau de cette dernière, dont, $c_1=c_2$. $C=\dfrac{\omega}{k}$, est la vitesse de la propagation des perturbations.

Ceci implique la continuité de la température à travers la nappe de Vortex-Courant, en équilibre, où la relation de dispersion (A.34) dans ce cas présent se réduit à :

$$
\begin{aligned}
&\left[Q^2\left(1+\beta_1^2\right)-\left(1+\beta_2^2\right)\right]C_1^6-2M\left[2Q^2\left(1+\beta_1^2\right)-\left(1+\beta_2^2\right)\right]C_1^5\\
&+\left\{Q^2\left[6M^2\left(1+\beta_1^2\right)-\beta_1^2\left(\beta_1^2+2\right)-\left(1+\beta_1^2\right)\right]-\left[\left(M^2-1\right)\left(1+\beta_2^2\right)-\beta_2^2\left(\beta_2^2+2\right)\right]\right\}C_1^4\\
&+2M\left\{Q^2\left[2\left(1+\beta_1^2\right)-2M^2\left(1+\beta_1^2\right)+\beta_1^2\left(\beta_1^2+2\right)\right]-\beta_2^2\left(\beta_2^2+2\right)\right\}C_1^3\\
&+\left\{\begin{array}{l}Q^2\left[-6M^2\left(1+\beta_1^2\right)+\beta_1^2\left(\beta_1^2+2\right)+M^4\left(1+\beta_1^2\right)-M^2\beta_1^2\left(\beta_1^2+2\right)+\beta_1^4\right]\\-\left[\beta_2^4-\left(M^2-1\right)\beta_2^2\left(\beta_2^2+2\right)\right]\end{array}\right\}C_1^2\\
&+2M\left\{Q^2\left[2M^2\left(1+\beta_1^2\right)-\beta_1^2\left(\beta_1^2+2\right)\right]+\beta_2^4\right\}C_1\\
&-\left\{Q^2\left[M^2-\beta_1^2\right]\left[M^2\left(1+\beta_1^2\right)-\beta_1^2\right]+\left(M^2-1\right)\beta_2^4\right\}=0,
\end{aligned}
\tag{A.35}
$$

où, nous avons pris sans perte de généralité, $V_2=0$, avec, $M=\dfrac{V_1}{c_1}$, $Q=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}$, *et* $C_1=\dfrac{C}{c_1}$, étant, respectivement, le nombre de Mach, le rapport de la densité des deux milieux, $r=\left(1,2\right)$, et le rapport de la vitesse de propagation des perturbations par rapport à la vitesse sonore.

En introduisant les quantités $R = \dfrac{B_1^2}{B_2^2}$, et :

$$\mathrm{Z} = \frac{\left(\dfrac{B_1^2}{\mu\rho_2} + \dfrac{B_2^2}{\mu\rho_2}\right)}{c_1^2},$$

$$\mathrm{Z} = \left(\frac{B_1^2}{\mu\rho_2 c_1^2} + \frac{B_2^2}{\mu\rho_2 c_1^2}\right),$$

$$\mathrm{Z} = \left(\frac{v_{A2}^2}{c_1^2} + \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{v_{A1}^2}{c_1^2}\right),$$

en l'occurrence, $\mathrm{Z} = \left(\beta_2^2 + Q\beta_1^2\right)$. Nous notons que β_2, β_1, *et* Q β_2, β_1, *et* Q, peuvent tous être exprimé en termes de Z et de R.

Il vient que, avec l'expression de Z, nous avons :

$$\mathrm{Z} = \beta_2^2\left(1 + Q\frac{\dfrac{v_{A1}^2}{c_1^2}}{\dfrac{v_{A2}^2}{c_1^2}}\right),$$

$$\mathrm{Z} = \beta_2^2\left(1 + Q\frac{v_{A1}^2}{v_{A2}^2}\right),$$

$$\mathrm{Z} = \beta_2^2\left(1 + Q\frac{B_1^2}{\mu\rho_1}\frac{\mu\rho_2}{B_2^2}\right),$$

$$\mathrm{Z} = \beta_2^2\left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{B_1^2}{B_2^2}\right),$$

$$\mathrm{Z} = \beta_2^2\left(1 + \frac{B_1^2}{B_2^2}\right),$$

Impliquant
$$\beta_2^2 = \frac{\mathrm{Z}}{\left(1+R\right)}. \tag{A.36}$$

Et, on utilisant la condition de la continuité de la pression totale, à savoir,

$$\rho_1\left(c_1^2 + \frac{\gamma}{2}v_{A1}^2\right) = \rho_2\left(c_2^2 + \frac{\gamma}{2}v_{A2}^2\right), \quad \text{avec, } c_1 = c_2,$$

$$\rho_1\left(1 + \frac{\gamma}{2}\frac{v_{A1}^2}{c_1^2}\right) = \rho_2\left(1 + \frac{\gamma}{2}\frac{v_{A2}^2}{c_1^2}\right),$$

$$\rho_1\left(1 + \frac{\gamma}{2}\beta_1^2\right) = \rho_2\left(1 + \frac{\gamma}{2}\beta_2^2\right),$$

Dont $R = \dfrac{B_1^2}{B_2^2} \;\Rightarrow\; \rho_1 = \rho_2 \left(\dfrac{\beta_2^2}{\beta_1^2}\right) R$, on obtient:

$$\rho_2 \; R \; \frac{\beta_2^2}{\beta_1^2}\left(1 + \frac{\gamma}{2}\beta_1^2\right) = \rho_2\left(1 + \frac{\gamma}{2}\beta_2^2\right),$$
$$R \; \beta_2^2\left(1 + \frac{\gamma}{2}\beta_1^2\right) = \left(\beta_1^2 + \frac{\gamma}{2}\beta_2^2\beta_1^2\right),$$
$$R\left(\beta_2^2\right) + \frac{\gamma}{2} R \; \beta_1^2\left(\beta_2^2\right) = \beta_1^2 + \frac{\gamma}{2}\beta_1^2\left(\beta_2^2\right),$$

en remplaçant β_2^2 par son expression:

$$R\left(\frac{\mathrm{Z}}{\left(1+R\right)}\right) + \frac{\gamma}{2} R \; \beta_1^2\left(\frac{\mathrm{Z}}{\left(1+R\right)}\right) = \beta_1^2 + \frac{\gamma}{2}\beta_1^2\left(\frac{\mathrm{Z}}{\left(1+R\right)}\right),$$
$$2R \; \mathrm{Z} = \left(2\left(1+R\right) + \gamma \; \mathrm{Z}\left(1-R\right)\right)\beta_1^2,$$

pour obtenir :

$$\beta_1^2 = \frac{2 \; R \; \mathrm{Z}}{\left(2\left(1+\mathrm{R}\right) + \gamma \; \mathrm{Z} \; \left(1\text{-}\mathrm{R}\right)\right)}. \tag{A.37}$$

Aussi, sachant que :

$Q = \dfrac{\rho_1}{\rho 2} = R \; \dfrac{\beta_2^2}{\beta_1^2}$, en remplaçant β_2^2 et β_1^2 par leurs expressions respectives, on aura:

$$Q = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\left(2\left(1+R\right) + \gamma \; \mathrm{Z} \; \left(1 \text{ - } R\right)\right)}{2\left(1+R\right)},$$

ou

$$Q^2 = \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} = \frac{\left(2\left(1+R\right) + \gamma \; \mathrm{Z} \; \left(1 \text{ - } R\right)\right)^2}{4\left(1+R\right)^2}.$$

Pour terminer, en remplaçant, β_1^2, β_2^2, *et* Q par leurs expressions nouvelles, dans l'équation de dispersion (A.35), on obtient, les coefficients dans l'ordre décroissant comme :

$$A\left(6\right) = -1 - \frac{Z}{1+R} + \frac{\left(2\left(1+R\right) + c\left(1-R\right)Z\right)^2\left(1 + \dfrac{2 \; R \; Z}{2\left(1+R\right) + c\left(1-R\right)Z}\right)}{4\left(1+R\right)^2},$$

$$A(5) = 2m\left(1+\frac{Z}{1+R}\right) - \frac{m\left(2\left(1+R\right)+c\left(1-R\right)Z\right)^2\left(1+\frac{2\ R\ Z}{2\left(1+R\right)+c\left(1-R\right)Z}\right)}{\left(1+R\right)^2},$$

$$\begin{aligned}
A\left(4\right) = {} & 1+\frac{Z}{1+R}+m^2\left(-1-\frac{Z}{1+R}\right)+\frac{Z\left(2+\frac{Z}{1+R}\right)}{1+R} \\
& +\frac{\left(2\left(1+R\right)+c\left(1-R\right)Z\right)^2\left(-1-\frac{2\ R\ Z}{2\left(1+R\right)+c\left(1-R\right)Z}\right)}{4\left(1+R\right)^2} \\
& +\frac{3m^2\left(2\left(1+R\right)+c\left(1-R\right)Z\right)^2\left(1+\frac{2\ R\ Z}{2\left(1+R\right)+c\left(1-R\right)Z}\right)}{2\left(1+R\right)^2} \\
& -\frac{RZ\left(2\left(1+R\right)+c\left(1-R\right)Z\right)\left(2+\frac{2\ R\ Z}{2\left(1+R\right)+c\left(1-R\right)Z}\right)}{2\left(1+R\right)^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(3) = {} & -\frac{m\left(2\left(1+R\right)+c\left(1-R\right)Z\right)^2\left(-1-\frac{2\ R\ Z}{2\left(1+R\right)+c\left(1-R\right)Z}\right)}{\left(1+R\right)^2} \\
& -\frac{m^3\left(2\left(1+R\right)+c\left(1-R\right)Z\right)^2\left(1+\frac{2\ R\ Z}{2\left(1+R\right)+c\left(1-R\right)Z}\right)}{\left(1+R\right)^2} \\
& -2m\left(\frac{\mathrm{Z}\left(2+\frac{\mathrm{Z}}{1+\mathrm{R}}\right)}{1+\mathrm{R}}-\frac{RZ\left(2\left(1+R\right)+c\left(1-R\right)Z\right)\left(2+\frac{2\ R\ Z}{2\left(1+R\right)+c\left(1-R\right)Z}\right)}{2\left(1+R\right)^2}\right),
\end{aligned}$$

$$A(2) = -\frac{2Z}{1+R} + \frac{RZ\left(2(1+R)+c(1-R)Z\right)}{(1+R)^2} - 2\left(\frac{Z^2}{(1+R)^2} - \frac{R^2Z^2}{(1+R)^2}\right)$$
$$+\frac{3m^2\left(2(1+R)+c(1-R)Z\right)^2\left(-1-\frac{2\ R\ Z}{2(1+R)+c(1-R)Z}\right)}{2(1+R)^2}$$
$$+\frac{m^4\left(2(1+R)+c(1-R)Z\right)^2\left(1+\frac{2\ R\ Z}{2(1+R)+c(1-R)Z}\right)}{4(1+R)^2}$$
$$+m^2\left(\frac{\mathrm{Z}\left(2+\frac{\mathrm{Z}}{1+\mathrm{R}}\right)}{1+\mathrm{R}} - \frac{RZ\left(2(1+R)+c(1-R)Z\right)\left(2+\frac{2\ R\ Z}{2(1+R)+c(1-R)Z}\right)}{2(1+R)^2}\right),$$

$$A(1) = -\frac{2mRZ\left(2(1+R)+c(1-R)Z\right)}{(1+R)^2} + 2m\left(\frac{Z^2}{(1+R)^2} - \frac{R^2Z^2}{(1+R)^2}\right)$$
$$-\frac{m^3\left(2(1+R)+c(1-R)Z\right)^2\left(-1-\frac{2\ R\ Z}{2(1+R)+c(1-R)Z}\right)}{(1+R)^2},$$

$$A(0) = \frac{Z^2}{(1+R)^2} - \frac{R^2Z^2}{(1+R)^2} + \frac{m^2RZ\left(2(1+R)+c(1-R)Z\right)}{(1+R)^2} - m^2\left(\frac{Z^2}{(1+R)^2} - \frac{R^2Z^2}{(1+R)^2}\right)$$
$$+\frac{m^4\left(2(1+R)+c(1-R)Z\right)^2\left(-1-\frac{2\ R\ Z}{2(1+R)+c(1-R)Z}\right)}{4(1+R)^2}.$$

Bibliographie

[1]. Abdelatif, T. E, Thomas, J.E: (1989). 'Transmission and Reflexion of Compressive Waves at a Nonmagnetic-Magnetic Interface.' The Astrophysical Journal Supplement Series 70: 239 -255.

[2]. Abdelatif, T. E. (1988). 'Surface and body waves in magnetic flux tubes.' Astrophysical Journal 333: 395-406.

[3]. Laghouati, Y. Bouabdellah, A. and Alemany, A. (2006). 'On baraclinic instability applied to the theory of Kelvin-Helmholtz instability.'. International Journal MHD 42: 171-180.

[4]. Laghouati, Y. Bouabdellah, A. Zizi, M.and Alemany, A. (2007). 'MHD Kelvin-Helmholtz instability in non hydrostatic equilibrium 'Journal of physics. and Bifd conference series DTU Kopenhagen August: 15-21, (2006).

[5]. Axford, W. I. (1962). 'Note on a problem of magnetohydrodynamic stability.' Canadian Journal of Physics 40: 654.

[6]. Axford, W.I.: (1960). 'The stability of plane current-vortex sheets.' Quart. Journal. Mechanic. Appl. Math 13: 314.

[7]. Beckers, J. M. and E. H. Schröter (1968). 'The Intensity, Velocity and Magnetic Structure of a Sunspot Region. I: Observational Technique; Properties of Magnetic Knots.' Solar Physics 4: 142.

[8]. Bernstein, I. B. and D. L. Book (1983). 'Effect of compressibility on the Rayleigh-Taylor instability.' Physics of Fluids 26: 453-458.

[9]. Chakraborty, B. B. (1968). 'The Hydromagnetic Stability of a Two-Dimensional Compressible Jet.' Progress of Theoretical Physics 40: 210-230.

[10]. Chandrasekhar, S. (1961). Hydrodynamic and hydromagnetic stability.

[11]. Cram, L. E. and P. R. Wilson (1975). 'Hydromagnetic waves in structured magnetic fields.' Solar Physics 41: 313-327.

[12]. Cowling, T.G.1976, Magnetohydrodynamics, Adam Hilger, Chap.3.

[13]. Defouw, R. J. (1976). 'Wave propagation along a magnetic tube.' Astrophysical Journal 209: 266-269.

[14]. Deubner, F.-L. (1971). 'Some Properties of Velocity Fields in the Solar Photosphere. III: Oscillatory and Supergranular Motions as a Function of Height.' Solar Physics 17: 6.

[15]. Edwin, P. M. and B. Roberts (1982). 'Wave propagation in a magnetically structured atmosphere. III - The slab in a magnetic environment.' Solar Physics 76: 239-259.

[16]. Fejer, J.A.: (1963). 'Hydromagnetic Reflection and Refraction at a Fluid Velocity Discontinuity.' Physics of Fluids 6: 508 - 513.

[17]. Fejer, J.A.: (1964). 'Hydromagnetic Stability at a Fluid Discontinuity between Compressible Fluids.' Physics of Fluids 7: 499 - 503.

[18]. Gerwin, R. A.: (1968). 'Stability of the Interface between Two fluids in Relative Motion.' Reviews of Modern Physics 40: 653 – 658.

[19]. Harvey, J. W. and J. A. Ionson (1977). 'Observations of Small-Scale Photospheric Magnetic Fields Resonant electrodynamic heating of stellar coronal loops - an LRC circuit analog.' Highlights of Astronomy 4: 223.

[20]. Ionson, J.A. 1978, 'Resonant absorption of Alfevenic Surface waves and the heating of solar coronal loops. 'Astophysical Journal 226: 650-673.

[21]. Jindia, R.K, Chakraborty, B.B.: (1972). 'Stability of a Combined Current and Vortex Sheet in Compressible, Perfectly Conducting Fluids.' Physics of Fluids 15: 1671- 1673.

[22]. Lessen, M., J. A. Fox, et al. (1965). 'The instability of inviscid jets and wakes in compressible fluid.' Journal of Fluid Mechanics 21: 129-143.

[23]. Lighthill, M. J. (1978). Waves in fluids. Cambridge [Eng.]; New York, Cambridge University Press.

[24]. Lighthill, M.J.: (1960). 'Studies on Magneto-Hydrodynamic waves and other anisotropic wave motions.' Department of Mathematics, University of Manchester 252: 397 - 430.

[25]. McKenzie, J. F. (1970). 'Hydromagnetic wave interaction with the magnetopause and the bow shock.' Planetary and Space Science 18: 1.

[26]. Milton, S. P., Din- Yu, H.: (1964). 'General Analysis of the Stability of Superposed Fluids.' Physics of Fluids 7: 1099 – 1108.

[27]. Parker, E. N. (1964). 'Dynamical Properties of Stellar Coronas and Stellar Winds. III. The Dynamics of Coronal Streamers.' Astrophysical Journal 139: 690.

[28]. Parker, E. N. (1974). 'The Nature of the Sunspot Phenomenon. II: Internal Overstable Modes.' Solar Physics 37: 127.

[29]. Pierre, L.: (1997). ' Le Soleil en face ; Le Soleil et les relations Soleil-Terre.' Masson, Paris. 1997.

[30]. Priest, E. R. (1982). Solar magneto-hydrodynamics. Dordrecht, Holland ; Boston Hingham, MA, D. Reidel Pub. Co. ; Sold and distributed in the USA and Canada by Kluwer Boston, Inc.

[31]. Priest, E.R. : (1985). 'Solar System Magnetic Field.' Geophysics and Astrophysics Monographs; D. Reidel Publishing Company.

[32]. Rae, I. C. and B. Roberts (1982). 'On MHD wave propagation in inhomogeneous plasmas and the mechanism of resonant absorption.' Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 201: 1171-1182.

[33]. Rae, I. C. and B. Roberts (1983). 'Long wave dispersion relations for surface waves in a magnetically structured atmosphere.' Physics of Fluids 26: 269-274.

[34]. Rae, I. C., B. Roberts, et al. (1982). 'On MHD wave propagation in inhomogeneous plasmas and the mechanism of resonant absorption Pulse propagation in a magnetic flux tube.' Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 201: 1171-1182.

[35]. Rae, I.C.: (1983). 'The MHD Kelvin – Helmholtz instability in the Solar photospher.' Astronomie. Astrophys 126 : 209 -215.

[36]. Roberts, B. (1981). 'Wave Propagation in a Magnetically Structured Atmosphere - Part Two - Waves in a Magnetic Slab.' Solar Physics 69: 39.

[37]. Roberts, B. (1981). 'Wave propagation in a magnetically structured atmosphere. I - Surface waves at a magnetic interface.' Solar Physics 69: 27-38.

[38]. Roberts, B. and A. R. Webb (1978). 'Vertical motions in an intense magnetic flux tube.' Solar Physics 56: 5-35.

[39]. Roberts, B. and A. R. Webb (1979). 'Vertical motions in an intense magnetic flux tube. III - On the slender flux tube approximation.' Solar Physics 64: 77-92.

[40]. Sen, A.K.: (1963). 'Stability of Hydromagnetic Kelvin- Helmholtz Discontinuity.' Physics of Fluids 6 : 1154 – 1163..

[41]. Sen, A.K.: (1964). 'Effect of Compressibility on Kelvin-Helmholtz Instability in a Plasma. Physics of Fluids 7: 1293 - 1298.

[42]. Simon, G. W. and R. B. Leighton (1964). 'Velocity Fields in the Solar Atmosphere. III. Large-Scale Motions, the Chromospheric Network, and Magnetic Fields.' Astrophysical Journal 140: 1120.

[43]. Southwood, D. J. (1968). 'The Hydromagnetic Stability of the Magnetospheric Boundary.' Planetary and Space Science 16: 587.

[44]. Spruit, H. C. and B. Roberts (1983). 'Magnetic flux tubes on the sun.' Nature 304: 401-406.

[45]. Stenflo, J. O. (1976). Small-Scale Solar Magnetic Fields. IAU Symp. 71: Basic Mechanisms of Solar Activity.

[46]. Stenflo, J. O. (1977). The Influence of Magnetic Fields on Solar Hydrodynamics, Experimental Results. IAU Colloq. 36: The Energy Balance and Hydrodynamics.

[47]. Vigouroux, A.: (1996). 'Etude de la Variabilité Solaire à Long Terme.' Thèse à Label Européen à L'Observatoire de la Cote d'Azur.

[48]. Wang, K.C, Maslen, S.H.: (1964).' Hydromagnetic Stability of a Vortex Sheet in Compressible Fluids.' Physics of Fluids 7: 1780 -1784.

[49]. Wentzel, D.G. :(1979). ' Hydromagnetic Surface waves.' Astrophysical Journal, Part 1,227: 319-322.