## **République Algérienne Démocratique et Populaire**

## Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de la Science et de la Technologie Houari Boumediene

## FACULTE DE PHYSIQUE

Mémoire présenté pour l'obtention du grade de Magister

## **En : Physique**

**Spécialité : Physique théorique** 

par : MECHERI Redouane

## THEME

# Effet de la rotation différentielle du Soleil sur ses paramètres de forme

Soutenu publiquement le 05/10/2003 devant le jury composé de :

M. FELLAH T. ABDELATIF N. ALLAL F. CHAFA A. MEZAOUI A. IRBAH Professeur (USTHB) Directeur de recherche (CRAAG) Professeur (USTHB) Maître de conférence (USTHB) Chargé de cours (USTHB) Maître de recherche (CRAAG) Président du jury Directeur de Thèse Examinateur Examinateur Examinateur Examinateur

## **République Algérienne Démocratique et Populaire**

## Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de la Science et de la Technologie Houari Boumediene

FACULTE DE PHYSIQUE

Mémoire présenté pour l'obtention du grade de Magister

**En : Physique** 

Spécialité : Physique théorique

par : MECHERI Redouane

## THEME

## Effet de la rotation différentielle du Soleil sur ses paramètres de forme

Soutenu publiquement le 05/10/2003 devant le jury composé de :

M. FELLAH	Professeur (USTHB)	Président du jury
T. ABDELATIF	Directeur de recherche (CRAAG)	Directeur de Thèse
N. ALLAL	Professeur (USTHB)	Examinateur
F. CHAFA	Maître de conférence (USTHB)	Examinateur
A. MEZAOUI	Chargé de cours (USTHB)	Examinateur
A. IRBAH	Maître de recherche (CRAAG)	Examinateur

A toute ma famille, mes parents, ma femme pour son soutien et sa patience et à mon fils Racim pour toute la joie qu'il nous a apporté.

## Remerciements

Je tiens avant tout à remercier mon directeur de thèse Toufik Abdelatif pour ses précieux conseils et orientations dans l'encadrement de cette thèse. Je remercie aussi Janine Provost et Gabrielle Berthomieu de l'Observatoire de Nice pour leur intérêt à mon travail et aussi pour avoir participer à l'encadrement de cette thèse avec leurs nombreux et judicieux conseils. Je remercie aussi Abdenour Irbah, Nassim Seghouani et Thierry Corbard pour leur aide. Je suis très reconnaissant au président ainsi qu'aux membres du jury pour avoir accepter d'examiner cette thèse.

## Table des matières

## Introduction générale

I. Présentation	1
II. La structure du soleil	2
II.1 La structure interne du soleil	2
II.1.1 Le cœur du soleil	2
II.1.2 La zone radiative	2
II.1.3 La tachocline	3
II.1.4 La zone convective	3
II.2 L'atmosphère solaire	3
II.2.1 La photosphère	3
II.2.2 La chromosphère	4
II.2.3 La région de transition	4
II.2.4 La couronne	4
III Variabilité solaire à travers l'observation	5
III 1 Activité magnétique du soleil	5 5
III 2 Irradiance	2
III.3 Diamètre solaire- Variations temporelles et latitudinales	9
IV. Rotation différentielle du soleil	14
V. Objectif des travaux entrepris	15
V.1 Paramètres de forme du soleil	15
V.2 Pourquoi étudier les paramètres de forme du soleil	15
V.3 Principales méthodes expérimentales de mesure des paramètres de forme du soleil	16
V 4 Travaux théoriques et expérimentaux déjà entrepris pour l'étude de	10
paramètres de forme du soleil	18
V 5 Apport	10
• .5 / upport	1)

## 1 Hydrodynamique stellaire

1

21

	1.3	Equations d'hydrodynamique	20
	1.4	Rotation permanente	22
		1.4.1 Introduction	22
		1.4.2 Hypothèses et définitions	24
		1.4.3 Barotropes, pseudo-barotropes et baroclines	26
		1.4.4 Stratification sphéroïdale	30
	1.5	Conclusion du chapitre 1	30
2	Dé	étermination des paramètres de forme du soleil	31
	2.1	Introduction	31
		1101 0 4 4 0 10 11	
	2.2	Décomposition du potentiel gravitationnel en fonction des	
		polynômes de Legendre - Moments gravitationnels	
		r - J	
	2.3	Calcul des moments gravitationnels et de l'aplatissement	33
		2.3.1 Expression de la vitesse angulaire de rotation	
		2.3.2 L'équation de l'équilibre hydrostatique du soleil	34
		2.3.3 L'équation de Poisson	
		2.3.4 Méthodes théoriques de détermination des moments gravitationnels	
		2.3.5 Calcul de l'aplatissement	45
	2.4	Modèles de rotation	47
		2.4.1 Modèle de Kosovichev (1996)	47
		2.4.2 Modèle de Corbard (a) et (b) (2002)	49
	2.5	Modèle solaire	51
	• •		
	2.6	Résolution du problème des deux valeurs aux limites	52
		2.6.1 Résolution de l'équation différentielle résultante de la Méthode Directe	
		2.6.2 Resolution de l'equation integrale resultante de la Methode de Green	53
	27	Conclusion du chanitre ?	54
	2.1	Conclusion du chaptere 2	
3	Ré	esultats, discussions et applications	55
	3.1	Introduction	55
	2 7	Dégultate et discussions	55
	3.2	<b>A Contract of the second sec</b>	
		3.2.2 Second ordre (n=4)	
	33	Applications	68
	5.5	3 3 1 Influence de la rotation du cœur sur la valeur de L	00 ۸۶
		3.3.2 Contribution à la résolution du problème des variations latitudinales du d	iamètre
		solaire	
		3.3.3 Contribution du moment quadrupolaire J <sub>2</sub> à l'avance du périhélie de Merc	ure 73

3.4 Conclusion du chapitre 3	74
Conclusion générale	77
Synthèse des résultats obtenus Les motivations Les travaux entrepris Les résultats	<b>77</b> 77 77 78
Les perspectives	79
Annexes	
<ul> <li>A Formules et équations en coordonnées cylindriques et sphériques</li> <li>A.1 Les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques</li> <li>A.2 Les équations de Navier-Stokes en coordonnées sphériques</li> </ul>	<b>81</b> 81 81
<b>B</b> Fonction de Green	83
Bibliographie	
Résumé-Abstract	89

## Introduction générale

Afin de préciser le cadre des recherches effectuées lors de la thèse, une description générale du Soleil sous la forme d'une introduction est nécessaire. Cette introduction se divise en trois sections principales : La première comporte une description de l'intérieur du Soleil dont l'étude est limitée par l'observation et qui inclue le noyau, la zone radiative et la zone convective, ainsi qu'une description de l'atmosphère solaire (photosphère, chromosphère, région de transition et couronne) plus accessible aux observations. La deuxième section est une description de la variabilité solaire à travers les paramètres solaires variables les plus étudiés qui sont : (i) les champs magnétiques qui présentent des structures très complexes, (ii) l'irradiance, que l'on peut associer à la brillance, (iii) le diamètre, dont les variations montrent à la fois des variations temporelles et latitudinales. La troisième section comporte une description de la forme du soleil à travers ses paramètres de formes qui sont les moments gravitationnels et l'aplatissement, et les efforts entrepris dans notre travail pour aller plus loin dans ce domaine.

## I. Présentation

L'univers est composé de milliards de galaxies, elles-mêmes composées de milliards d'étoiles. Le Soleil représente simplement une étoile appartenant à la Voie Lactée, notre galaxie (fig. I.1). Autour de cette étoile gravitent neufs planètes (Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune et Pluton) et une multitude d'astéroïdes et de comètes dont les mouvements sont très bien décrits par les lois de Kepler. Le système solaire constitue pour l'Homme le plus proche laboratoire pour comprendre la structure de l'Univers. La Terre et les Hommes ne pourraient exister sans la présence du Soleil. Cette étoile, foyer de notre système solaire, a facilité le développement et le maintien de la vie sur Terre. En cela, il est important de connaître sa structure, son évolution et son influence sur le climat ainsi que sur le comportement terrestre.



Figure I.1: Position du Soleil dans la Voie Lactée

## II. Structure du Soleil

## II.1 Structure interne du soleil

L'intérieur du Soleil peut être divisé en quatre régions (fig. II.1) dans lesquelles les processus physiques sont totalement différents : le noyau ou coeur du Soleil, la zone radiative, la tachocline et la zone convective. La tachocline est une région de transition entre la zone radiative et la zone convective.



Figure II.1: Structure du Soleil

#### II.1.1 Le coeur du Soleil

Le cœur du Soleil est la source d'énergie de l'étoile. Il est le siège de nombreuses réactions thermonucléaires qui transforment l'hydrogène en noyaux d'hélium. Ces réactions produisent de l'énergie qui se retrouvera sous la forme de lumière visible au niveau de la surface. La température au centre du Soleil est de 15 MK et la densité de 150 g.cm<sup>-3</sup>. Les deux décroissent rapidement lorsque l'on s'éloigne du centre. Par exemple à la limite du noyau (~175000 km du centre), la température a diminué de moitié et la densité est de 20 g.cm<sup>-3</sup>. Ces réactions nucléaires créent également des neutrinos qui passent directement à travers les différentes couches de l'intérieur solaire et que l'on peut détecter sur la Terre. Le nombre de neutrinos détecté reste très inférieur au nombre de neutrinos prédit (environ un facteur 3). Le problème de ces neutrinos manquants est encore à l'heure actuelle un des grands mystères de la physique solaire.

#### **II.1.2** La zone radiative

Dans la zone radiative, l'énergie se transporte par collisions électrons-photons (transport radiatif). Ce processus impose aux photons un temps de transport supérieur à  $10^6$  années pour sortir de la zone radiative. Cette zone s'étend de  $0.25R_0$  à  $0.75R_0$  ( $R_0$  étant le rayon moyen du

Soleil) avec une température passant de 7 MK à 2 MK et une densité variant de 20 g.cm<sup>-3</sup> à 0.2 g.cm<sup>-3</sup>. On considère en général que l'ensemble constitué du noyau et de la zone radiative est en rotation rigide autour de l'axe nord-sud.

#### **II.1.3** La tachocline

La tachocline est l'interface entre la zone radiative et la zone convective. Cette fine couche (estimée à 3000 km) est le siège de phénomènes qui ont motivé les récentes études : la turbulence et/ou la circulation méridionale peuvent expliquer les changements soudains dans la composition chimique entre la zone radiative et la zone convective, et l'effet de dynamo solaire présent au niveau de cette interface permet de caractériser un site de création du champ magnétique.

#### **II.1.4 La zone convective**

La zone convective s'étend de la tachocline à la surface visible du Soleil (~ 200000 km). La température varie de 2 MK à la base de la zone de convection à 5700 K à la surface. L'existence d'ions lourds (e. g. carbone, oxygène, calcium, fer) rend le milieu plus opaque et les radiations ont plus de difficultés à traverser cette couche. La densité à la surface (~  $2.10^{-7}$  g.cm<sup>-3</sup>) est 10<sup>6</sup> fois inférieure à la densité à la base de la zone de convection. Les mouvements convectifs engendrés par ces forts gradients de densité et de température sont observables à la surface solaire comme des granules ou des supergranules.

Le fait que la zone de convection soit opaque rend les observations des couches internes du Soleil impossibles. Par contre, il existe des oscillations solaires globales (modes de pression ou de gravité) directement liées à la nature même de l'étoile (profondeur de la zone de convection, taux de rotation de la zone radiative, ...). L'analyse de ces oscillations globales permet donc de sonder l'intérieur du Soleil : c'est l'héliosismologie.

## II.2 L'atmosphère solaire

L'atmosphère solaire est divisé à son tour en quatre régions différentes : la photosphère, la chromosphère, la région de transition et la couronne. Ces régions du fait de leur aspect surfacique sont plus accessibles aux observations que l'intérieur du soleil.

#### II.2.1 La photosphère

La surface visible du Soleil est appelée photosphère. C'est une couche très mince (~100 km) avec une température proche de la température effective du Soleil :  $T_e = 5785$  K. Les principales figures caractéristiques de la photosphère sont les taches solaires, les facules, les granules et les supergranules. Comme nous l'avons déjà évoqué, ces deux dernières structures sont représentatives des cellules de convection (respectivement, avec une largeur de ~1000 km et de ~35000 km). Les taches solaires sont des points noirs sur le Soleil associés à des régions possédant de fortes valeurs du champ magnétique (quelques milliers de Gauss). Le champ magnétique est le plus intense et presque vertical dans l'ombre des taches, et le moins intense et presque entièrement horizontal dans la pénombre. Les taches sont utilisées comme des traceurs de l'activité magnétique. Le nombre de Wolf (nombre de taches et groupes de taches solaires) a permis de mettre en évidence le cycle d'activité magnétique solaire de l'ordre de 11 ans. Ce cycle peut aussi être observé en étudiant les variations en latitude des taches (diagramme papillon).

#### II.2.2 La chromosphère

Dans la chromosphère, la densité continue à décroître rapidement alors que la température atteint environ 20000 K. La raie H $\alpha$  à 6563 Å est la plus utilisée pour caractériser les figures principales de la chromosphère : les plages, les filaments, les protubérances, les fibrilles, les spicules. Le réseau chromosphérique créé par le champ magnétique est observable dans la raie K du calcium ionisé. Les plages sont des régions brillantes caractérisant les forts champs magnétiques des taches solaires et des polarités magnétiques associées à ces taches. Les protubérances (vues au limbe) ou les filaments (vus sur le disque solaire) sont des structures magnétiques plus denses et plus froides que leur environnement. Ces structures sont principalement observées dans des raies chromosphériques mais le corps de ces structures se situe dans la couronne. Les spicules sont de petits jets de matière dirigés de la chromosphère vers la couronne avec une vitesse de l'ordre de 20 km.s<sup>-1</sup>.

#### II.2.3 La région de transition

Au-delà de la chromosphère, commence une zone qui est le siège de phénomènes très particuliers. La température, de 10 000 K à la limite supérieure de la chromosphère, augmente brusquement à 100 000 K en quelques dizaines de kilomètres, ainsi que l'indiquent quelques modèles de cette zone de transition entre chromosphère et couronne. Simultanément la densité électronique décroît, de telle sorte que la pression gazeuse, proportionnelle au produit de la densité électronique et de la température, reste sensiblement constante. Au-delà, la montée en température se fait de façon moins abrupte et la température coronale de l'ordre du million de degrés est atteinte à une altitude de 10 000 à 20 000 km. La montée rapide en température implique l'existence d'un mécanisme de chauffage de l'atmosphère solaire qui demeure encore un problème non résolu. Entre les années 40 et 70, le chauffage de l'atmosphère était attribué à la dissipation dans la couronne d'ondes acoustiques provenant des régions convectives. En effet la turbulence dans la zone convective générerait un bruit acoustique, qui se propagerait vers l'atmosphère en transportant de l'énergie. Ces ondes n'ayant pas été détectées dans la région de transition, cette hypothèse a été abandonnée. Aujourd'hui, plusieurs phénomènes sont envisagés : mécanisme de chauffage lié au champs magnétiques forts des régions actives, en particulier par dissipation d'ondes appelées "ondes Alfvèn" (ondes magnétiques provoquées par la convection qui se propageraient jusqu'à la haute chromosphère où elles se transformeraient en énergie thermique, le chauffage de la couronne se ferait de façon identique); mode de chauffages transitoires par l'intermédiaire des éruptions dans les régions actives; chauffage par reconnection magnétique; etc.

#### II.2.4 La couronne

La couronne se situe après la zone de transition et s'étend jusqu'à une région mal définie. La température s'élève jusqu'à  $10^6$  K. Sa faible brillance la rend inobservable en dehors des éclipses totales du soleil : seule la basse couronne peut s'observer au coronographe. La couronne émet un rayonnement radio, dû aux transitions libre-libre des électrons (c'est-à-dire à l'émission de rayonnement par les électrons libres qui perdent de l'énergie cinétique). On l'observe aussi en ultraviolet et en rayon X : à ces longueurs d'onde, la faible intensité du rayonnement photoélectrique continu ne perturbe pas l'observation de la couronne.

## III. Variabilité solaire à travers l'observation

Dans ce qui va suivre, nous allons donner une description de la variabilité solaire à travers son magnétisme son irradiance et son diamètre.

#### III.1 Activité magnétique du soleil

L'intense chaleur qui règne dans le soleil agite sa surface de plusieurs phénomènes, plus ou moins violents, ces derniers sont de nature magnétique. Ce magnétisme a pour origine l'effet dynamo. Dire que le soleil se comporte comme une dynamo signifie qu'il transforme son énergie cinétique tirée des mouvements de convection à grande échelle et de la rotation différentielle mise en évidence dans la zone convective, en énergie électrique et en champs magnétique. Parmi ces phénomènes nous citerons les taches solaires, les protubérances et les éruptions solaires.

#### Les taches solaires

Ces cyclones magnétiques sont des zones plus froides que le reste de la surface du Soleil (environ 4500° contre 6000° pour le reste de la surface du Soleil). Ce sont des régions plutôt calmes où le magnétisme concentré bloque les flux de chaleur et d'énergie (et par conséquent de lumière) provenant de l'intérieur du soleil. Les taches sont composées de 2 parties (fig. III.1): une zone centrale, appelée "ombre", entourée d'une zone moins noire, d'aspect filamenteux, appelée "pénombre". La surface du Soleil, également appelée "photosphère" a une structure en grains de riz, bien visible sur l'image ci-dessous. Ces grains correspondent aux bouillons qui agitent la photosphère, chacun d'entre eux étant grand comme la France.



Figure III.1 : Une tache solaire (photo SOHO)

Ces taches solaires apparaissent, disparaissent, se fragmentent, fusionnent au fil des jours, tissant à la surface du Soleil une dentelle sans cesse renouvelée. Elles sont également emportées par la rotation du Soleil sur lui-même. En outre, les taches sont animées d'un mouvement propre qui les fait dériver à la surface du Soleil : les taches naissent pour l'essentiel dans une zone appelée la "zone royale", située à 40° de latitude de part et d'autre de l'équateur du Soleil. Leur mouvement propre tend à les faire dériver de jour en jour en direction de l'équateur.

#### Les protubérances et les éruptions solaires

La surface du Soleil crache également en direction de son atmosphère de grandes flammes qui s'élèvent dans la couronne. Ce sont en réalité de gigantesques jets de matière dense, électrisée et froide, en comparaison au milieu coronal les environnant. Elles sont appelées soit protubérances lorsqu'elles sont observées au limbe, soit filaments lorsqu'elles sont sur le disque. Les protubérances (fig. III.2) sont des structures allongées qui s'étirent parfois sur la moitié du disque solaire et qui s'ouvrent de façon soudaine pour expulser leur contenu.



**Figure III.2 :** Protubérance solaire : Le petit rond en bas, à gauche vous permet de comparer les tailles de la Terre et de cette splendide protubérance

Le Soleil peut aussi connaître de terribles colères : les éruptions solaires (fig. III.3). A l'occasion de brutales ruptures du champ magnétique solaire, d'énormes jets de plasma brûlant parviennent à s'arracher à l'attraction gravitationnelle du Soleil et foncent dans l'espace pour atteindre parfois la Terre où elles donnent naissance à des aurores boréales.



Figure III.3 : Eruption solaire (photo SOHO)

#### Le Cycle solaire

Toute cette activité bouillonnante de notre Soleil connaît des hauts et des bas : les astronomes ont en particulier repéré l'existence d'un cycle de 11 ans appelé "cycle un décennal" : tous les 11 ans, l'activité du Soleil connaît ainsi un pic maximal d'activité. Le découvreur de ce cycle est l'astronome allemand Heinrich Schwabe, en 1840 (dans l'indifférence générale ...). Nous en sommes aujourd'hui au 23ème cycle solaire. Ce cycle semble dû au champ magnétique solaire, car notre étoile se comporte comme un gigantesque aimant, avec un pôle positif et un pôle négatif. Si les lignes de force du champ magnétique ne sont pas visibles à l'oeil, par contre, les trajectoires des protubérances qui s'écoulent le long de certaines de ces lignes de force permettent de visualiser leurs boucles à la surface du Soleil (fig. III.4).



Figure III.4 : Boucles magnétiques à la surface du soleil (photo SOHO)

Tous les 11 ans, pour une raison encore mystérieuse, le champ magnétique du Soleil s'inverse, le pôle positif du Soleil devient le pôle négatif et vice-versa. Lorsque le Soleil approche du moment de ce changement de polarité, l'activité est minimale : les protubérances sont plutôt rachitiques et il est fréquent de ne pas apercevoir une seule tache à la surface du Soleil pendant plusieurs jours, voire plusieurs semaines. Par contre, lors du pic maximal d'activité du Soleil, les protubérances sont légion, on assiste à de fréquentes éruptions solaires, responsables d'aurores boréales sur Terre, et les taches se multiplient à la surface du Soleil.

#### **III.2** L'irradiance

La variabilité apparente du soleil est aisément détectable et connue depuis près de deux siècles ne serait-ce qu'en observant le nombre de taches solaire. En revanche des mesures directes de sa variabilité au sens stellaire (c'est-à-dire des variations de sa luminosité) n'ont été obtenues que depuis un peu plus d'une dizaine d'années. Longtemps considérée comme une constante et donc anciennement appelée constante solaire, l'irradiance est relative au flux d'énergie de la surface solaire, c'est-à-dire l'énergie émise par unité de surface et de temps, pour une longueur d'onde données. Cette énergie qui définit la constante solaire, est émise par le soleil et reçue par la terre, hors atmosphères, à la distance de 1 UA, sur une surface de 1 m<sup>2</sup> placée perpendiculairement au rayonnement incident. Plusieurs instruments embarqués à bord

de satellites ont mesuré l'irradiance (fig. III.5). L'étude des données qui en résulte montre que les variations sont de l'ordre du  $\mu$ .w.m<sup>-2</sup> sur des échelles de temps de quelques minutes, qu'elles peuvent atteindre 0.2 % sur des échelles de temps de quelques jours et enfin qu'elles sont en phase avec le cycle solaire de 11 ans, avec une amplitude relative de 0.1 % (Willson et Hudson 1991). Sa valeur moyenne actuelle est 1368 W.m<sup>-2</sup> (Nesme-Ribes et Thuillier, 2000). La figure III.5 montre les variations temporelles mesurées par différents instruments HF/ERB à bord de NIMBUS 7, ACRIM I et II à bord respectivement de SMM et de UARS, le moniteur solaire sur ERBS, SOVA 2 sur EURECA et VIRGO sur SOHO.





C'est la reconstruction de l'irradiance totale du soleil à partir des différentes données depuis 1978 qui a permis de mettre en évidence plusieurs fréquences temporelles allant de quelques jours à quelques mois, et celles qui correspondent au cycle d'activité solaire de 11 ans.

## III.3 Le diamètre solaire - Variations temporelles et latitudinales

Les variations du diamètre solaire concernent les variations temporelles sur différentes échelles mais aussi les variations latitudinales qui ont une implication directe sur la forme du soleil.

#### **Prévisions théoriques**

Bien que le diamètre solaire apparent ait été mesuré plus au moins régulièrement depuis trois siècles environ, on sait peu de chose sur ses variations au cours du temps et le sujet est encore très controversé. Il en est de même aussi concernant ses éventuelles variations latitudinales. Des variations même très faibles du diamètre seraient d'un grand intérêt astrophysique puisque les théories les plus simples de structure stellaire ne prédisent aucune variation mesurable. Avec la limitation des modèles qui ne prennent pas en compte la rotation, le champ magnétique ou l'asphéricité, le seul changement attendu dans le diamètre du soleil est celui prévu par l'évolution de l'étoile, c'est-à-dire 2.9 cm par an étant donné son âge, sa composition et sa masse (Iben 1967). Ainsi, depuis la formation du soleil, le rayon

aurait augmenté de 0.88 R<sub>0</sub> à sa valeur actuelle alors que la luminosité serait passée de 0.72 L<sub>0</sub> (L<sub>0</sub> étant la luminosité moyenne du Soleil) à sa valeur actuelle. Lors de cette évolution, la température effective (5800 K°) n'aurait varié que de 95 K environ, contribuant peu à l'évolution de la luminosité. Luminosité et rayon sont donc intimement liés tout au moins par la théorie. Ainsi, puisque les mesures de l'irradiance solaire montrent une variation de l'ordre de 0.1% sur le cycle solaire, le rayon mesuré devrait lui aussi varier. Cependant sa variation n'est détectable que si elle est de 5 à 6 ordres de magnitude supérieurs aux 2.9 cm par ans prédits par la théorie. Une telle variation relèverait d'un processus différent de celui de l'évolution nucléaire. Les processus susceptibles d'impliquer une variation observable du diamètre sont en fait nombreux et leur importance relative est controversée. A titre d'exemple de ces processus le champ magnétique, si les champs magnétique de surface se prolongent à l'intérieur de l'étoile sous forme de champs verticaux, ces derniers sont à la source d'un déplacement de gaz relatif à la différence de densité entre l'extérieur et l'intérieur du tube pouvant correspondre à une variation de ravon de l'ordre de  $\Delta R/R \approx 10^{-10}$  (Spruit 1994). Deuxième exemple, la convection, le soleil n'étant pas en équilibre hydrostatique, il oscille et est sujet à des écoulements convectifs. Si la force de ces écoulements et oscillations varie avec le cycle solaire, cela pourrait provoquer une petite variation du rayon. La théorie prédit que convection et oscillations provoqueraient des changements du même ordre de grandeur et de valeur  $\Delta R/R \approx 2.10^{-7}$ . En tenant compte du fait que la convection peut être réduite par les champs magnétiques qui diminuent d'un facteur 10 la valeur originelle qu'elle induit, les variations iraient dans le sens d'une diminution du diamètre quand l'activité magnétique est à son maximum (Spruit 1994).

Il est vrai qu'effectuer des mesures du diamètre à partir du sol avec une grande précision est une chose difficile. La difficulté vient du fait que ces mesures sont soumises à l'influence de la turbulence atmosphérique. Mais des techniques appropriées de mesures, puis de réduction de données et enfin de traitement du signal peuvent permettre une détection de ses variations. Le problème est de relier les variations observées aux processus susceptibles d'impliquer une variation observable du diamètre.

#### Variations temporelles

Dans cette section nous présenterons les résultats des travaux développés à partir de l'analyse des données sol du diamètre solaire obtenues par différents observateurs. Nous considérerons en particulier dans cette analyse les observations effectuées par F.Laclare (Laclare et al. (1999)) en France (fig. III.7), et celles effectuées par Leister et Bénévidès-Soarès (1990) au Brésil (fig. III.8).

Principe de mesure du diamètre solaire -Les mesures françaises (fig. III.7), brésiliennes (fig. III.8) et chiliennes (fig. III.10) ont été obtenues avec un astrolabe solaire, basé sur le principe de l'astrolabe de Danjon. Le principe de mesure du diamètre peut être illustré par la (fig. III.6). Si t<sub>1</sub> et t<sub>2</sub> sont les temps de passage enregistrés du bord supérieur T<sub>1</sub> et inférieur T<sub>2</sub> du soleil par le cercle de hauteur, et si  $z_1$  et  $z_2$  sont les distances zénithales du centre du soleil correspondant respectivement aux temps t<sub>1</sub> et t<sub>2</sub> et corrigés des effets de la réfraction atmosphérique et d'autres paramètres instrumentaux (Laclare et al. 1996), donc le diamètre solaire est donné par la relation  $z_1$ -  $z_2$ . La réfraction astronomique n'affectera pas le résultat puisqu'elle va s'éliminer en effectuant la différence  $z_1$ -  $z_2$ . De là, (fig. III.6) il est évident que le diamètre mesuré a toujours une direction verticale par rapport au système de référence local et que les passages des bords du soleil T<sub>1</sub> et T<sub>2</sub> sont observés à la même distance zénithale. Ces observations sont dites visuelles car c'est l'observateur qui définit la position du bord. Cette définition est subjective puisqu'elle résulte de l'appréciation personnelle variant d'un observateur à un autre. Les résultats peuvent donc être affectés par cette incertitude, mais le caractère de continuité de ces mesures sur plusieurs années peut diminuer de la valeur de cette incertitude. Dans le cas de mesures réalisées avec une caméra CCD, le bord solaire est défini par l'ensemble des points d'inflexion déterminés pour chaque ligne balayée. L'important est que cette mesure devienne impersonnelle, donc moins sujette au jugement de l'observateur.

**Résultats obtenus** - L'ensemble des ces mesures du diamètre au sol présentent des variations temporelles. On retrouve en particulier la période de 11 ans, caractéristique de celle du cycle des taches solaires. La comparaison de la variation de ces deux indicateurs (diamètre et nombre de taches) pour chaque série de données, ne mène cependant pas à la même conclusion concernant la relation phase entre les variations du diamètre et celles du nombre de taches. En effet, les données obtenues au Brésil (fig. III.8) et en France (fig. III.7) montrent que les variations du diamètre et des taches sont en opposition de phase (fig. III.9), alors que d'après les données obtenues au Chili (fig. III.10) et aux USA, ces variations seraient corrélées. Ce désaccord constitue l'énigme de la variation du diamètre solaire.

Par ailleurs, les diagrammes présentant respectivement les mesures françaises (fig. III.7) et brésiliennes (fig. III.8) montrent qu'il existe une seconde période de 1000 jours visible surtout entre 1978 et 1986 (Laclare et al. 1996). Cette période, qui a été détectée dans les mesures de l'irradiance, effectuées par la sonde ACRIM I à bord du satellite SMM (fig. III.5) laisse supposer que les variations sont d'origine solaire.

Ces différentes corrélations entre le diamètre, l'irradiance et le nombre de taches solaires, et par suite avec les variations de la forme de la surface du soleil, laissent supposer que ces paramètres sont reliés entre eux par des processus internes, dont on ne comprend pas encore le mécanisme de fonctionnement.

#### Variations latitudinales

Des variations latitudinales du diamètre solaire en étés mises en évidence à partir des deux séries de mesures faites en France (Laclare et al. 1999) et au Chili (Nöel, 1999) (fig. III.11). Une comparaison de ces données avec la valeur moyenne du diamètre montre que le diamètre mesuré est plus grand autour de 45° de latitude avec un écart de 0.04 arcsec et plus petit autour de 25° et 70° que le diamètre moyen avec un écart de 0.07 arcsec (le demi-diamètre moyen est estimé à 959,51 ± 0.01 millisecondes d'arc par Laclare et al. 1999 et à 960.186 ± 0.012 millisecondes d'arc par F.Nöel 1999). Le seul désaccord entre les deux séries de mesures se situe autour de 30° et 90° de latitude héliographique. Cela peut être expliqué par le fait que le lieu géographique d'observation ne permet pas toujours d'effectuer des mesures à toutes les latitudes héliographiques et que les instruments utilisés ne permettent pas d'observer de manière simultanée le disque solaire en sa totalité.

Par ailleurs, à partir de la connaissance des variations latitudinales, il sera possible de mesurer les déformations subies par la surface du soleil et d'accéder ainsi à la mesure de l'aplatissement solaire et à ses moments gravitationnels (paramètres qui mesurent l'amplitude des déformations subies par la surface du soleil).



**Figure III.6 :** Principe de mesure du diamètre solaire : P et Z sont respectivement le pôle céleste et le zénith,  $\phi$  la latitude, H<sub>1</sub> et H<sub>2</sub>,  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , sont respectivement les angles horaires et les déclinaisons du soleil positionné en S<sub>1</sub> et S<sub>2</sub>.



Figure III.7 : Demi-diamètre solaire mesuré en France



Figure III.8 : Demi-diamètre solaire mesuré au Brésil

DEMI-DIAMETRE



**Figure III.9 :** Anticorrélation entre les mesures du Demi-diamètre solaire effectuées en France et au Brésil avec le cycle d'activité solaire.



**Figure III.10 :** Corrélation entre les mesures du Demi-diamètre solaire effectuées au Chili et aux USA avec le cycle d'activité solaire.



**Figure III.11 :** Variations latitudinales du diamètre solaire mises en évidence à partir des deux séries de mesures faites en France (Laclare et al. 1999) et au Chili (Nöel, 1999)

## IV. Rotation différentielle du Soleil

Le Soleil se comporte comme une sphère gazeuse n'ayant pas une rotation rigide. Ainsi l'équateur fait un tour tous les 25 jours environ ( $\Omega/2\pi \approx 460$  nHz) alors que les zones polaires mettent environ 35 jours ( $\Omega/2\pi \approx 330$  nHz) pour effectuer une révolution complète. Ce phénomène nommée rotation différentielle du soleil, est observée en surface depuis plusieurs siècles. L'héliosismologie par des techniques d'inversion des fréquences d'oscillation observees à la surface du soleil, permet de remonter à la rotation des couches internes du soleil inaccessibles par l'observation directe (fig. IV.1).



**Figure IV.1** : Rotation interne du Soleil- Courbes d'iso-rotation sur une coupe en profondeur de la sphère solaire, obtenus par inversion 2D des données acquises durant les 144 premiers jours de l'instrument MDI à bord du satellite SoHO (Thèse Corbard (1998)). On remarque que les résultats sur l'estimation de la rotation du cœur et des zones polaires demeurent incertains.

Le résultat présenté ici sous forme de courbes iso-rotation sur une coupe en profondeur de la sphère solaire a été obtenu par inversion des données acquises durant deux ans par

l'instrument LOWL à Hawaii combinées aux premières observations de l'instrument GOLF à bord du satellite SoHO qui permettent de sonder le coeur solaire (jusqu'à 0.2 rayon solaire). Ce travail a permis de montrer que la rotation différentielle observée en surface demeure dans toute la zone convective (au dessus de 0.7 rayon solaire) avant d'évoluer très rapidement vers une rotation rigide de l'intérieur radiatif.

La rotation du coeur solaire devrait pouvoir être précisée très prochainement par l'accumulation des observations réalisées par GOLF et VIRGO à bord de SoHO. Il semble avec les données actuelles que la rotation soit quasiment rigide avec une valeur correspondant à la rotation de surface à mi-latitude ( $\Omega/2\pi \approx 330$  nHz) entre la base de la zone convective jusqu'à une profondeur de 0.2 rayon solaire.

La zone de transition rapide entre les deux régimes de rotation, nommée tachocline solaire est probablement le siège de la dynamo solaire et fait actuellement l'objet de nombreuses études théoriques.

## V. Objectif des travaux entrepris

## V.1 Paramètres de forme du Soleil.

Comme nous l'avons vu plus haut, les variations latitudinales du diamètre solaire sont intimement liées aux paramètres de formes qui définissent la forme de la surface du soleil. L'étude des paramètres de forme du soleil est justement le thème qui nous intéresse et qui va faire l'objet de cette thèse. Les variations latitudinales du diamètre solaire peuvent être la conséquence des distorsions que subit la surface du soleil dues à certains processus qui lui sont intrinsèques comme le champ magnétique ou la rotation. Dans l'hypothèse de l'absence d'un champ magnétique, je ne considère dans mon travail que la rotation et ses effets sur la forme de la surface solaire.

Les paramètres de forme qui permettent de définir la forme des corps célestes en rotation et en particulier du soleil sont l'aplatissement et les moments gravitationnelles  $J_l$  (paramètres qui mesurent l'amplitude des déformations subies par la surface du soleil).

## V.2 Pourquoi étudier les paramètres de forme du Soleil

L'étude des paramètres de forme a pour objectifs principaux :

- L'étude de l'écart de la surface du soleil à la symétrie sphérique à travers la connaissance des amplitudes des déformations subies par la surface du soleil qui nous sont donnés par ses paramètres de forme..
- La contribution à la résolution du problème non encore élucidé de la variation latitudinale du diamètre solaire.
- Apporter une nouvelle contrainte aux modèles solaires qui ne prennent pas en compte la rotation et l'asphéricité.
- L'influence des moments gravitationnels solaires sur les orbites planétaires des planètes les plus proches du soleil, par exemple la contribution du moment quadrupolaire J<sub>2</sub> à l'avance du périhélie de Mercure.
- L'introduction des moments gravitationnels J<sub>2</sub> et J<sub>4</sub> dans des modèles analytiques liés à la relativité générale et la mécanique céleste devrait permettre d'améliorer le modèle général du BDL (Bureau des Longitudes) pour l'établissement des éphémérides.

## V.3 Principales méthodes de mesure des paramètres de forme du Soleil

Il existe à ce jour très peu d'expériences qui permettent de mesurer l'aplatissement solaire. La difficulté réside justement dans le degré de finesse requis : mettre en évidence des variations de l'ordre de 10km sur un rayon de l'ordre de 700 000km revient à mettre en évidence des variations de l mm sur le rayon de la Terre. Néanmoins voici dans ce qui suit, la présentation de quelques instruments mesurant ces paramètres et plus précisément l'aplatissement.

#### Le "Princeton Oblateness Telescope"

Cet instrument a fourni ses premières mesures en 1966 (Dicke et Goldenberg, 1974) quand il était installé à Princeton (New Jersey, USA), puis d'autres mesures ont été effectuées après son installation au Mont Wilson (Californie, USA) suivi d'une amélioration de l'instrument en 1983 (Dicke et al., 1985, 1986 et 1987).

Dans la première version de l'instrument, l'image du soleil au foyer du télescope est partiellement occultée par un disque opaque (divers disques de différents diamètres sont choisis par l'observateur). Il n'est alors visible qu'une couronne au limbe, dont la dimension dépend du disque choisi. Un disque opaque supplémentaire, portant une fente, est en rotation rapide. Les deux fenêtres qui résultent de cette fente ne laissent passer qu'une zone de deux degrés par fenêtre sur la couronne laissée visible (fig. V.1).

L'image résultante est reformée sur un détecteur qui enregistre le flux transmis par le couple d'ouvertures. En l'absence d'aplatissement, le flux est constant au cours de la rotation du disque. En présence d'aplatissement, la couronne visible n'étant pas d'épaisseur constante, le flux est modulé sur le pourtour solaire. Cette modulation permet de mettre en évidence, même en présence de fluctuations rapides du flux (atmosphère, bruit de photons), la variation de l'épaisseur de la couronne, et donc l'aplatissement (fig. V.1).

Les principales améliorations qui ont été apportées à l'instrument sont les suivantes :

- le passage à un échantillonnage plus serré permet une meilleure analyse du signal modulé, et la possibilité de détecter des distorsions plus fine que celle de l'aplatissement;
- les mesures sont effectuées dans deux canaux spectraux à large bande afin de détecter et de comparer les effets achromatiques;
- un système d'asservissement de centrage du soleil est ajouté sur le disque occulteur.



Figure V.1 : Principe de la mesure avec l'instrument le "Princeton Oblateness Telescope"

#### Le "Solar Disk Sextant"

Les premières observations réalisées avec cet instrument ont été obtenues en 1990 (Maier et al., 1992). Il permet de mesurer le diamètre solaire pour différentes orientations par rapport à l'axe polaire. Installé à bord d'un ballon stratosphérique pour s'affranchir des effets de la turbulence atmosphérique, le vol a duré une dizaine d'heures et a procuré six heures de données exploitables.

Le principe de cet instrument est le suivant : un système optique à prisme d'air forme deux images du soleil (fig. V.2). La séparation centre à centre des deux images est déterminée par l'angle du prisme d'air. Un ensemble de sept caméras CCD (Charge Coupled Device) enregistre localement le flux de photons au limbe. Trois des caméras CCD couvrent la zone de proximité des deux images (fig. V.2), et les quatre autres caméras sont disposées au limbe, par série de deux caméras sur chacune des images, à des dispositions séparées de 60° en azimut.

L'analyse des limbes locaux, à une distance azimutale de 60°, permet de localiser le centre de chaque image. Les trois caméras CCD qui analysent la zone de tangence mesurent l'écart entre les deux limbes. A partir de ces données qui indiquent la distance centre à centre D, et l'écart entre les deux images dans la zone de tangence d, on obtient une mesure du diamètre solaire.



Figure V.2 : Principe de la mesure avec l'instrument le "Solar Disk Sextant"

#### L'Héliomètre à Balayage

Le premier programme d'observation avec cet instrument (Rösch et Yerle, 1983 et 1984) a démarré en 1993 au Pic du Midi (France). Une amélioration de l'instrument, qui concerne l'électronique et l'informatique, a ensuite été entreprise (Deslandes, 1993).

La mesure du diamètre solaire consiste à mesurer les points d'inflexion qui apparaissent sur les profils d'intensité du limbe.

L'héliomètre à balayage est un instrument qui analyse le flux d'intensité, en balayant avec un miroir, les deux limbes opposés de l'image du disque solaire (fig. V.3). Il peut tourner autour de son axe optique, qui est colinéaire à l'axe optique du télescope, et permet ainsi de balayer le diamètre selon différentes orientations.

C'est principalement au limbe qui porte l'information cherchée, et c'est par la distance angulaire des deux points d'inflexion traversés que l'on détermine le diamètre du soleil, selon la direction de balayage et dans deux longueurs d'ondes différentes (dans le vert et dans le rouge). La vitesse de balayage est suffisamment rapide pour figer la turbulence atmosphérique affranchissant (en partie) la mesure de cet effet de dégradation. Divers autres aspects de l'ensemble instrumental et du traitement des données permettent de contrôler et d'éliminer les effets indésirables, rendant ainsi homogènes l'ensemble des mesures. En particulier cet instrument travaille en différentiel afin d'éliminer les causes de biais dans les estimations qui pourraient être dues, par exemple, à la variation des paramètres instrumentaux.



Figure V.3 : Principe de la mesure avec l'Héliomètre à Balayage

## V.4 Travaux théoriques et expérimentaux déjà entrepris pour l'étude des paramètres de forme du Soleil

Les premières mesures de ces paramètres, en particulier du moment quadrupolaire et de l'aplatissement, ont été entrepris dans les années 60 par Dicke et Goldenberg (1967 et 1974), par Lieske et Null (1966) et par Hill et Stebbins (1975). Des évaluations théoriques ont aussi été réalisées Roxburgh (1964) et par Goldreich et Schubert (1968), par Ulrich et Hawkins (1981a et 1981b), par Kislik (1983), par Campbell et al. (1983) et par Bursa (1986). Les résultats obtenus étant très disparates, l'intérêt pour l'étude de ces paramètres de forme s'est amoindri. Seuls Dicke et al. (1985,1986 et 1987) ont continué leurs mesures en perfectionnant

leur instrument. Les années 90 sont le témoin d'un regain d'intérêt pour les mesures de ces paramètres de forme avec de nouveau instruments (Maier et al., 1992); (Lydon et Sofia, 1996); (Rösch et al., 1996); (Rozelot et Rösch, 1996); Khun et al.(1998) ou par des méthodes d'observation indirectes (Landgraf, 1992). De nouvelles évaluations théoriques ont aussi été réalisées par Afanaseva et al. (1990), par Paternò et al. (1996), par Rozelot et Bois (1998), par Pijpers (1998), par Godier et Rozelot (1999 et 2000) et par Rozelot et al. (2001) et Roxburgh (2001). L'ensemble des résultats obtenus pour l'aplatissement sont décrits par les intervalles  $[(5,6 \pm 6.3).10^{-6}; (2,0 \pm 0.14).10^{-5}]$  pour les données observationnelles et  $[10,8.10^{-6}; 3,5.10^{-4}]$  pour les évaluations théoriques. L'ensemble des résultats de l'étude du moment quadrupolaire sont contenus dans les intervalles  $[1,6.10^{-7}; (2,4 \pm 0.23).10^{-5}]$  pour les données observationnelles et  $[0; (1,8 \pm 2,0).10^{-5}]$  pour les évaluations théoriques. Les améliorations qui ont été entreprises pour déterminer les valeurs des paramètres de forme ont d'abord concerné leurs ordres de grandeur avant de préciser la valeur de la décimale. Depuis 1996, les mesures et les évaluations théoriques du moment quadrupolaire semblent converger vers une valeur voisine de 2.  $10^{-7}$ .

#### V.5 Apport

La détermination théorique des paramètres de forme du soleil qui sont l'aplatissement et les moments gravitationnels passe par la résolution de l'équation différentielle qui régit la structure du Soleil. Cette dernière ne se résout pas analytiquement. Elle nécessite donc d'être intégrée numériquement. La difficulté de cette intégration numérique réside dans l'utilisation des modèles pour exprimer la masse et la densité du Soleil en tout point du rayon, ainsi que la vitesse de rotation qui ne suit pas les mêmes lois suivant que l'on se place près du centre, dans la zone radiative, dans la zone convective ou à la surface (rotation différentielle).

Les valeurs recherchées des moment gravitationnels  $J_n$  étant très fine (ex : de l'ordre de  $10^{-7}$  pour  $J_2$  et de  $10^{-9}$  pour  $J_4$ ), le moindre changement d'un paramètre extérieur peut faire varier considérablement le résultat. C'est pourquoi, il est nécessaire d'employer plusieurs méthodes d'intégration afin de conforter les résultats obtenus et évaluer l'erreur faite sur le calcul.

Ce travail a l'originalité de présenter deux méthodes de résolution numérique fondamentalement différente pour résoudre l'équation différentielle qui régit la structure du soleil. La première méthode consiste à résolution des équations différentielles. La seconde méthode consiste à transformer cette équation différentielle en une équation intégrale à l'aide de la fonction de Green, pour ensuite avoir recours à des méthodes numériques pour la résolution des intégrales. Ce travail présente aussi l'intérêt d'utiliser un modèle de densité et de masse (modèle solaire) bien calibré en surface de manière à calculer les paramètres de forme d'une manière correcte.

Jusqu'à il y'a quelques années de ça, les différentes déterminations théoriques des paramètres de forme (section V.4) étaient basées sur l'hypothèse d'une rotation uniforme ou d'une rotation différentielle qui suit une certaine loi en puissance qui s'ajuste bien avec les observations. Actuellement, les données que nous procure l'héliosismologie fournissent des informations précises sur la rotation differentielle du soleil (qui comprend à la foi une dépendance radiale et latitudinale) et ceci non seulement en surface mais aussi à l'intérieur du soleil (fig. IV.1). De ce fait, ce travail présente aussi l'originalité de prendre en compte la dépendance radiale et latitudinale de la rotation du soleil dans les l'évaluation théoriques des paramètres de forme, et ceci à partir de modèles analytiques de rotation différentielles récents, déterminés à partir de l'inversion des données héliosismiques (Kosovichev (1996), Corbard et al. (2002)). Ces modèles prennent en compte la présence d'un gradient radial de rotation près de la surface quantifié, dans le cas du modèle de Corbard, à partir de données observationnelles

héliosismique obtenues à partir de l'instrument MDI (Michelson Doppler Imager) à bord du satellite SOHO (Corbard et Thompson (2001)).

Les résultats obtenus nous permettrons de déterminer l'influence de la dépendance radiale et latitudinale de la rotation ainsi que la présence d'un gradient radial subsurfacique sur les valeurs des paramètres de forme.

## **Chapitre 1**

## Hydrodynamique stellaire

## **1.1 Introduction**

La plupart des objets dans l'univers astrophysique sont constitués de matière ionisée qui peut être considérée comme un plasma. De ce fait, les astrophysiciens doivent étudier les plasmas pour savoir comment fonctionne l'univers. Cependant, souvent, les équations ordinaires de la mécanique des fluides peuvent être adéquates à certains problèmes d'astrophysique dans les quels les interactions électromagnétiques ne sont pas importantes. Cela vient du fait qu'un plasma peut être considéré comme une sorte de fluide dont les particules constituantes sont chargées. Le caractère spécial du plasma devient apparent seulement dans le cas où les interactions électromagnétiques jouent un rôle important. Quand les interactions électromagnétiques ne sont pas importantes, le plasma devient un fluide neutre qui obéît à de simples équations. L'étude de la structure stellaire et l'étude des oscillations stellaires sont par exemple d'importants problèmes astrophysiques pour lesquels les équations de la mécanique des fluides ordinaires conviennent parfaitement, bien que les étoiles sont constituées de plasma. Si l'étoile possède un champ magnétique élevé, il sera nécessaire d'opérer une très petite correction due au plasma. D'ailleurs, l'un des sujets de recherche les plus courant dans l'étude des oscillations solaires est d'étudier l'effet du champ magnétique sur ces dernières. Dans le cas du soleil, l'approximation qui consiste à négliger l'effet du champ magnétique moyen sur sa structure est pleinement justifiée. Ceci reste vrai pour la grande majorité des étoiles, excepté pour certaines configurations terminales de l'évolution de l'étoile (surtout les étoiles naines blanches et les étoiles à neutrons).

De façon générale, l'hydrodynamique stellaire repose sur l'hypothèse que l'étoile est un milieu continu, c'est-à-dire que les propriétés de n'importe quelle petite portion de l'étoile sont les mêmes que celles de la matière d'un point de vue global sur une échelle macroscopique qui est grande par rapport aux distances entre particules constitutives. Cette hypothèse implique qu'il est possible de donner un sens aux valeurs moyennes (tel que la densité, la vitesse, la pression) en tout point de l'étoile, et qu'en général ces valeurs moyennes sont des fonctions continues de l'espace dans le temps. En pratique, pour définir une quantité moyenne nous devons considérer des domaines qui sont petits comparés au volume total de l'étoile, mais beaucoup plus grand que le libre parcours moyen entre particules ; pour que le mouvement aléatoire de ces particules n'ait aucun effet sur les valeurs moyennes. A titre d'exemple, à chaque fois qu'on parle de la vitesse d'un élément de masse (ou d'une particule fluide) nous sous-entendons toujours la vitesse moyenne d'un grand nombre de particules contenues dans un volume de dimensions finies, si bien que ce volume peut être assimilé à un point.

#### **1.2** Variables Eulériennes et variables Lagrangiennes

La description mathématique de la structure stellaire interne du point de vue du continuum fournit deux méthodes d'approche concernant les dérivées des variables par rapport au temps : la dérivée Eulérienne et la dérivée Lagrangienne. La dérivée Eulérienne qui est dénotée  $\partial /\partial t$  implique une dérivation par rapport au temps en un point fixe. D'un autre côté, on peut penser

à se déplacer avec un élément fluide à la vitesse  $\vec{v}$  tout en différentiant par rapport au temps une certaine quantité qui lui est associée. Ce type de dérivation par rapport au temps est appelé dérivée Lagrangienne, elle est dénotée par d/dt. La relation qui relie les dérivées Eulérienne et Lagrangienne est :

$$\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}Q \tag{1.1}$$

avec Q peut être une quantité scalaire, un vecteur, ou tenseur associé à l'élément fluide.

#### **1.3 Equations d'hydrodynamique**

Dans le cadre de la mécanique classique, les équations générales de l'hydrodynamique englobent trois principes fondamentaux, *la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement* et *la conservation de l'énergie*. Ces équations, obtenues sur la base du modèle du continuum, sont données respectivement par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho \,\vec{v}) = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{F} + \frac{\mu}{\rho}\left[\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v})\right]$$
(1.3)

$$\rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\varepsilon \right) - \vec{\nabla}.(K\vec{\nabla}T) + p\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$$
(1.4)

avec  $\rho$  étant la densité d'un élément fluide,  $\vec{v}$  sa vitesse, p la pression agissant sur cet élément fluide,  $\vec{F}$  les forces de volume par unité de masse agissant sur cet élément fluide qui, en l'absence de champ magnétique, sont dues à l'attraction gravitationnelle de l'étoile, on peut écrire donc que  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ , où V est le potentiel gravitationnel,  $\mu$  est la viscosité dynamique de l'élément fluide et  $v = \mu / \rho$  sa viscosité cinématique,  $\varepsilon$  représente l'énergie interne de l'élément fluide par unité de masse, T sa température et K son coefficient de conductivité thermique. Les équations (1.1), (1.2) et (1.3) ont été obtenues en faisant les hypothèses que la variation spatiale de  $\mu$  est négligée et que la production de chaleur provenant du ralentissement du mouvement du fluide à cause de la viscosité est négligée.

#### **1.4 Rotation permanente**

#### **1.4.1 Introduction**

Considérons une étoile dont le mouvement de rotation et le champ magnétique sont complètement négligeables ; supposons aussi que l'étoile est en configuration d'auto gravitation isolée des autres corps. Par conséquent, comme nous le savons tous, le système suppose une forme sphérique, i.e., la surface sur laquelle la pression totale p s'annule est une sphère. De plus, les surfaces à pression constante -les surfaces isobariques- peuvent être décrites par des sphères concentriques. En conséquence, le potentiel gravitationnel V, la densité  $\rho$ , la température T et la luminosité L aussi possèdent une symétrie centrale. C'est

cette simplicité géométrique qui rend le problème de structure et d'évolution des étoiles rayonnante en équilibre hydrostatique soluble.

Considérons maintenant une étoile qui tourne autour d'une direction fixe dans l'espace avec une vitesse angulaire donnée. Comme nous le savons, en l'absence de champ magnétique, l'étoile prend une forme oblate (sphère aplatie aux pôles). Nous nous retrouvons ainsi face à la question suivante : quelle est la forme géométrique de la limite surfacique extérieure ? Quelle est la forme des surfaces sur lesquelles les paramètres physiques restent constants ? Pour résumer, quelle est réellement la stratification d'une étoile en rotation et à quel point elle dépend de la distribution de la vitesse angulaire de rotation. Il est évident que la limite surfacique n'est plus sphérique. Pouvons-nous décrire les surfaces isobariques par des ellipsoïdes appropriés ? Sous certaines conditions, cela est une possibilité ; mais, pour une étoile en rotation arbitraire, la forme ellipsoïdale en général n'est pas une approximation acceptable. A première vue nous pourrions considérer l'étoile symétrique par rapport à son axe de rotation. Pourrions-nous alors au moins nous attendre à ce que l'étoile soit symétrique par rapport à un plan perpendiculaire à son axe de rotation ? Cela est vrai à condition que quelques conditions rigoureuses soient réunies. En fait, nous n'avons a priori aucune connaissance sur la stratification réelle dans une étoile en rotation. En général, la stratification est inconnue et doit découler des équations de l'hydrodynamique du problème. Cette situation est très différente dans le cas des étoiles sans rotation pour lesquelles la stratification sphérique est supposée d'avance.

A ce stade, une autre difficulté surgit dans la théorie de la rotation stellaire. A l'exception des étoiles que l'on considère tourner comme un corps solide, les frottements entre les différentes couches induisent un transfert du moment angulaire au cours du temps. Par conséquent, si nous n'émettons des hypothèses simplificatrices, nous ne pourrons pas s'attendre à s'approcher convenablement des étoiles en rotation différentielle à travers des modèles dépendant du temps. Aussi si on considère les forces de frottement visqueux dans le cas des étoiles en rotation lente comme le soleil, elles vont logiquement petit à petit stopper le mouvement relatif entre les différentes couches du fluide et le soleil va tourner comme un corps solide puisqu'aucun mécanisme physique ne maintient cette rotation différentielle, or l'observation montre bien que le soleil possède réellement une vitesse de rotation différentielle radiale et latitudinale. Cela s'explique par le fait que les forces visqueuses n'ont pas assez de temps pour établir une rotation du soleil en tant que corps solide, l'effet de la viscosité moléculaire est complètement négligeable. La viscosité apparaît dans les équations de Navier-Stokes dans le terme  $v \nabla^2 \vec{v}$  qui est complètement négligeable dans les systèmes à grande échelle.

En raison des remarques précédentes, on ne peut pas espérer étudier la structure et l'évolution des étoiles en rotation avec le même degré de généralité que celui obtenu pour les étoiles en équilibre hydrostatique.

Dans certains systèmes astrophysiques comme les disques d'accrétion ou les galaxies spirales, la force de gradient de pression peut être négligeable. Dans de telles situations, ces systèmes restent en équilibre hydrostatique qui résulte du fait que la force centrifuge est équilibrée par la force de gravité. La situation est complètement différente dans le cas des étoiles en rotation lente comme le soleil, où l'équilibre hydrostatique provient du fait que le champ gravitationnel et le gradient de pression réalisent un quasi-équilibre entre eux, de sorte que la pression s'ajuste de manière à laisser une partie de son gradient pour équilibrer la force centrifuge. L'observation montre que pour la grande majorité des phases de l'évolution stellaire, l'équilibre hydrostatique est vérifié. Toute étoile s'écartant de son équilibre hydrostatique verra sa structure évoluer pour un temps caractéristique appelé temps de chute libre. Dans ce chapitre nous allons voir quelques propriétés mécaniques simples concernant les étoiles en rotation.

#### 1.4.2 Hypothèses et définitions

Posons avant tout les hypothèses suivantes :

- (i) L'étoile est isolée dans l'espace et tourne autour d'un axe fixe avec une certaine vitesse angulaire.
- (ii) Le système est stationnaire vu à partir d'un repère référentiel d'inertie.
- (iii) la densité de chaque élément de masse reste constante pendant que nous suivons son mouvement fluide incompressible.
- (iv) Les frottements sont complètement négligés.
- (v) Aucune force électromagnétique ne s'exerce sur l'étoile.

Par définition, si une quelconque configuration satisfait toutes les propriétés ci-dessus, elle est dite est en état de rotation permanente pour un observateur inertiel. Considérons maintenant que l'étoile tourne autour d'un axe z, et que l'origine de notre repère de référence est le centre de masse. Ainsi en coordonnées cylindriques  $(l, \varphi, z)$ , les composantes de la vitesse  $\vec{v}$  sont :

$$v_1 = 0, v_{\omega} = \Omega l, v_z = 0$$
 (1.5)

dans un repère d'inertie; pour le moment, la vitesse angulaire  $\Omega$  est une fonction des coordonnées spatiales.

A partir des hypothèses précitées, une première conclusion peut être tirée :

Si une étoile gazeuse vue à partir d'un repère d'inertie est en état de rotation permanente, elle possède nécessairement une symétrie axiale.

Ce résultat est une simple conséquence de la conservation de la masse. En effet, on peut écrire :

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \,\vec{\nabla}.\vec{v} = 0 \tag{1.6}$$

où

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\rho + \rho\,\vec{\nabla}.\vec{v} = 0 \tag{1.7}$$

du moment que la densité d'un élément de masse ne varie le long de son chemin (fluide incompressible), on a  $d\rho/dt=0$ ; malgré la nature gazeuse du système, par conséquent de l'équation (1.6) on obtient :

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{v}} = 0 \tag{1.8}$$

Des équations (1.5) et (1.8) on obtient :

$$\Omega = \text{constante} \quad \text{ou} \quad \Omega = \Omega(l, z)$$
 (1.9)

A partir de l'hypothèse (ii), on a  $\partial \rho / \partial t = 0$ ; donc, les équations (1.7) et (1.8) donne :

$$\vec{\mathbf{v}}.\nabla\rho = 0 \tag{1.10}$$

Cette équation montre que la vitesse  $\vec{v}$  se trouve dans un plan tangent aux surfaces de densité constante. Par conséquent à partir des équations (1.5), (1.9), et (1.10) on peut écrire :

$$\Omega \; \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0 \tag{1.11}$$

et sachant que  $\Omega$  est différente de zéro, on trouve :

$$\rho = \rho(\mathbf{l}, \mathbf{z}) \tag{1.12}$$

En se servant des équations (1.9) et (1.12), on peut facilement montrer que p, V, T, L possèdent une symétrie axiale.

En prenant en compte les hypothèses énoncées dans (1.4.2), les équations de Navier-Stokes (1.3) se réduisent à l'équation d'Euler qui est :

$$(\vec{\mathbf{v}}.\vec{\nabla})\vec{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\mathbf{p} - \vec{\nabla}\mathbf{V}$$

Cette équation se simplifie énormément en considérant la symétrie axiale ( $\partial/\partial \phi=0$ ), et s'écrit donc en coordonnées cylindriques sous la forme (annexe A) :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} = -\frac{\partial V}{\partial l} + \Omega^2 l$$
(1.13)

et

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$$
(1.14)

Le potentiel gravitationnel et la densité sont donnés par l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 \mathbf{V} = 4\pi \,\mathbf{G}\,\rho \tag{1.15}$$

où G est la constante gravitationnelle. Au lieu de l'équation (1.15), il est parfois plus pratique d'utiliser la forme intégrale du potentiel Newtonien :

$$V(l,z) = -G \int_{\gamma} \frac{\rho(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{x}|} d\vec{x}$$
(1.16)

où la triple intégrale doit être évaluée sur un volume  $\gamma$  de l'étoile. Par convention, la limite stellaire correspond à la surface  $\ell$  sur laquelle la pression s'annule. La forme intégrale (1.16) a l'avantage d'incorporer directement les conditions aux limites du potentiel gravitationnel, i.e., la continuité de la gravitation à travers la surface  $\ell$ .

Pour compléter la formulation du problème, on doit maintenant inclure une équation d'état. En général, la pression dépend de la densité, la température, et la composition chimique de l'étoile. A ce stade on n'a pas besoin d'une expression explicite de cette équation d'état, on se contentera symboliquement de :

$$\mathbf{p} = \mathbf{p} \left( \boldsymbol{\rho}, \mathbf{T}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \right) \tag{1.17}$$

ou  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,... sont un ensemble de variables qui dépendent généralement de l et de z. Par définition, on appelle *barocline* (ou étoile *baroclinique*) un système qui obéît à la relation (1.17). Naturellement, la température est une quantité inconnue ; donc, même si l'ensemble des variables  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,... sont connues, il nous faudra impérativement une autre équation de thermodynamique pour compléter notre ensemble d'équations. Pour le moment, nous n'aurons pas besoin d'une telle relation.

Sous certaines circonstances spéciales, il convient de compléter les équations du mouvement par une relation géométrique entre juste la pression et la densité. Supposons alors que nous avons :

$$\mathbf{p} = \mathbf{p} \left( \boldsymbol{\rho} \right) \tag{1.18}$$

Tous les modèles qui possèdent de telles relations sont appelés *barotrope* (ou étoile *barotropique*).

La différence principale entre les étoiles barotropiques et barocliniques est dans leur stratification respective. Les surfaces de densité constante -surfaces isopicniques- et les surfaces à pression constante -surfaces isobariques- coïncident dans un *barotrope*, contrairement dans un *barocline* ou les surfaces isopicniques sont en général inclinées par rapport aux surfaces isobariques ; dans ce cas, la coïncidence peut se produire sous certaines conditions particulières.

#### 1.4.3 Barotropes, pseudo-barotropes et baroclines

Beaucoup de propriétés utiles peuvent être déduites des équations (1.13) et (1.14). Dans le but de déterminer ces propriétés, définissons  $\vec{g}$  comme étant la gravité effective qui est l'attraction gravitationnelle par unité de masse à laquelle on ajoute l'accélération centrifuge (force centrifuge par unité de masse). En coordonnées cylindriques, on a :

$$g_{\rm r} = -\frac{\partial V}{\partial l} + \Omega^2 \, l \tag{1.19}$$

et

$$g_z = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \tag{1.20}$$

Par conséquent les équations (1.13) et (1.14) peuvent être écrites sous la forme :

$$\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\mathbf{p} = \vec{\mathbf{g}} \tag{1.21}$$

Une première déduction peut aisément tirer :

Dans une étoile en état de rotation permanente, la gravité effective est toujours perpendiculaire aux surfaces isobariques.

Cette propriété est valable et pour les étoiles barotropiques et pour les étoiles barocliniques.

#### Le théorème de Poincaré-Wavre (Tassoul 1978)

Supposons maintenant que l'étoile tourne comme un corps solide. Les équations (1.19) et (1.20) deviennent :

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} \Phi \tag{1.22}$$

ou, à une constante près, nous avons :

$$\Phi(l,z) = V(l,z) - \frac{1}{2}\Omega^2 l^2$$
(1.23)

Considérons maintenant une étoile en rotation différentielle. Sous quelles conditions la gravité effective dérive d'un potentiel ? A partir de l'équation (1.20), cela est possible si et seulement si  $\Omega$  ne dépend pas de z, au lieu de l'équation (1.23), on obtient :

$$\Phi(l,z) = V(l,z) - \int_{0}^{1} \Omega^{2}(l') \, l' \, dl'$$
(1.24)

Nous allons voir que plusieurs conclusions intéressantes peuvent être tirées de l'existence d'un tel potentiel.

Avant tout, d'après l'équation (1.21), on peut toujours écrire :

$$\frac{1}{\rho}dp = g_1 dl + g_z dz$$
(1.25)

En utilisant les équations (1.22) et (1.24), nous trouvons :

$$\frac{1}{\rho} dp = -d\Phi \tag{1.26}$$

Par définition, pour chaque déplacement sur une surface de niveau  $\Phi$  = constante, on a d $\Phi$  = 0. Etant donnée que l'équation précédente donne aussi dp = 0 sur la même surface, les surfaces isobariques coïncident avec les surfaces de niveau. Donc, on a :

$$p = p(\Phi)$$
 ou  $\Phi = \Phi(p)$  (1.27)

et

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\Phi}{dp} \tag{1.28}$$

Par conséquent, la densité est aussi constante sur une surface de niveau. En conclusion toutes les surfaces sur lesquelles p,  $\rho$ , et  $\Phi$  restent constantes coïncident. Comme conséquence le vecteur de gravité effective  $\vec{g}$  est normal aux surfaces isopicniques (surfaces de densité constante).

Réciproquement, considérons une étoile où les surfaces isobariques et isopicniques coïncident. Si nous écrivons :

$$\Phi(\mathbf{p}) = -\int \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\rho(\mathbf{p})} \tag{1.29}$$

L'équation (1.25) devient :

$$d\Phi = -g_1 dl - g_z dz \tag{1.30}$$

La quantité  $d\Phi$  est différentielle totale exacte ; en conséquence, l'équation (1.22) doit être vérifiée et  $\vec{g}$  dérive automatiquement d'un potentiel.

Finalement supposons que la gravité effective est en tout point perpendiculaire aux surfaces isopicniques. A partir de l'équation (1.21) nous avons que la pression est constante sur de telles surfaces (la gravité effective est toujours perpendiculaire en tout point aux surfaces isobariques). La coïncidence des deux surfaces est ainsi établie.

En rassemblant tout ce qui a précédé, nous pouvons prouver le théorème suivant :

*Pour une étoile en rotation permanente, si une seule des propositions suivantes existe, elle implique automatiquement les trois autres :* 

- *(i) la vitesse angulaire ne dépend pas de z,*
- (ii) la gravité effective dérive d'un potentiel,
- (iii) la gravité effective est perpendiculaire aux surfaces isopicniques,
- *(iv) les surfaces isobariques et isopicniques coïncident.*

Ces résultats très importants ont été montrés en premier par Poincaré et Wavre.

On serait tenté de croire que ces quatre propositions font toutes référence uniquement aux barotropes tout en excluant les étoiles barocliniques. Ce n'est pas tout à fait vrai. Afin de le démontrer considérons un système pour lequel  $\Omega$  dépends de l et de z. Si nous éliminons le potentiel gravitationnel V entre les équations (1.13) et (1.14), on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial z}(\Omega^2 \mathbf{l}) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{l}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} \left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z}$$
(1.31)

En prenant en compte l'équation (1.5), on obtient :

$$2\frac{\partial\Omega}{\partial z}\vec{v} = \vec{\nabla}\frac{1}{\rho} \times \vec{\nabla}p \tag{1.32}$$

A partir de cette équation on peut facilement dire que les surfaces isobariques et isopicniques coïncident si et seulement si :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0 \tag{1.33}$$

C'est une conséquence directe de l'équation du mouvement et ne nécessite pas une connaissance préalable de l'équation d'état.

La condition (1.33) est toujours satisfaite pour les barotropes en rotation uniforme ou non uniforme. Toutefois, si on considère une étoile baroclinique à laquelle on impose la condition (1.33), l'équation (1.32) montrera automatiquement que les surfaces isobariques et isopicniques coïncident aussi dans ce cas là. Par conséquent, en général, on peut affirmer que :

Quelle que soit l'équation d'état, les étoiles barocliniques pour lesquelles  $\partial \Omega / \partial z = 0$  sont caractérisées par les propriétés suivantes :

(i) la gravité effective dérive d'un potentiel.
- *(ii) la gravité effective est perpendiculaire aux surfaces isopicniques.*
- *(iii) les surfaces isobariques et isopicniques coïncident toujours.*

Dorénavant, ces étoiles barocliniques particulières seront appelées "pseudo-barotropes", du fait qu'elles ont la plupart des propriétés des étoiles barotropiques. Les pseudo-barotropes doivent être distinguées des vraies baroclines pour lesquelles nous donnons les propriétés suivantes :

Une étoile baroclinique en rotation non uniforme pour laquelle la vitesse de rotation dépend de l et de z possèdent les propriétés suivantes :

- (i) la gravité effective ne dérive pas d'un potentiel.
- *(ii) en aucun cas la gravité effective n'est perpendiculaire aux surfaces isopicniques.*
- *(iii)* Les surfaces isobariques et isopicniques sont toujours inclinées d'un angle fini l'une par rapport à l'autre.

En résumé, excepté le cas particulier des pseudo-barotropes, nous pouvons dire que les étoiles barotropiques sont caractérisées par les deux propriétés équivalentes suivantes :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$$
 et  $p = p(\rho)$  (1.34)

De plus, que l'on soit dans le cas barotropique ou pseudo-barotropique, la stratification est telle que les surfaces sur lesquels p,  $\rho$  et  $\Phi$  restent constantes coïncident ; aussi, les lignes de force de la gravité effective sont perpendiculaires à ces surfaces. Les propriétés précédentes simplifient énormément le problème de configuration des étoiles en rotation. Au contraire, les choses ne sont pas aussi simples avec les vraies baroclines pour les quelles les équations (1.34) ne sont plus valables. Plus important est le fait que la gravité effective n'est plus perpendiculaire aux surfaces isopicniques.

#### Le théorème de Lichtenstein (Tassoul 1978)

Une autre distinction entre les barotropes et les baroclines peut se faire et ceci concernant l'existence d'un plan équatorial de symétrie. Cette question n'est pas aussi simple et évidente car un tel plan peut ne pas exister ! Ce problème a été profondément étudié par Lichtenstein et Wavre, qui ont prouvé, sans reprendre les démonstrations, ce qui suit (Tassoul. 1968) :

Les étoiles en rotation avec une vitesse angulaire ne dépendant pas de z, possèdent toujours un plan équatorial de symétrie perpendiculaire à leur axe de rotation.

Comme prévu, il est plus compliqué de trouver un plan équatorial de symétrie dans le cas des vraies baroclines que dans le cas des barotropes. En effet, la vitesse angulaire dépend de l et de z, et certaines conditions doivent être réunies pour assurer l'existence de ce plan. Sans faire de démonstration encore, on peut résumer les résultats obtenus dans ce qui suit (Tassoul. 1968) :

Pour une étoile baroclinique en rotation différentielle, si la vitesse angulaire est partout une fonction à valeur unique de la densité  $\rho$  et de la distance l de l'axe de symétrie, on peut dire que l'étoile est symétrique par rapport à un plan équatorial. En d'autres termes, considérons une droite arbitraire traversant l'étoile dans une direction parallèle à son axe de rotation. Cette droite coupe chaque surface isopicnique en deux points. Si  $\Omega(l, z)$  a la même valeur en ces deux points,  $\Omega(\rho, l)$  est une fonction à valeur unique; ceci assure parfaitement l'existence d'un plan équatorial de symétrie. Dorénavant, quand on parle d'étoiles barocliniques on postule toujours l'existence d'un plan équatorial de symétrie.

## 1.4.4 Stratification sphéroïdale

A ce stade, il est important de ce dire sous quelles conditions les surfaces isobariques peuvent être décrites par des sphéroïdes concentriques. La question n'est pas aussi simple qu'elle peut apparaître. Sans faire de démonstration, nous allons dire pour une étoile en rotation uniforme, les seules solutions acceptables sont les sphéroïdes en rotation uniforme de densité constante, avec une pression constante sur des sphéroïdes homothétiques. Nous pouvons dire aussi concernant les étoiles en rotation différentielles pour lesquelles la vitesse angulaire de rotation  $\Omega$  ne dépend que de l, qu'elles n'acceptent pas une stratification sphéroïdale. Toutefois, nous pouvons énoncer d'une manière générale la proposition suivante (Tassoul 1978) :

Dans un barotrope ou pseudo-barotrope de densité centrale en état de rotation permanente, les surfaces isobariques ne peuvent pas être décrites par une série de sphéroïdes concentriques.

Ce résultat appelle à faire deux remarques. La première est que si nous considérons au départ que l'écart à la sphéricité est petit, la stratification sphéroïdale peut être utilisée pour décrire les étoiles en rotation lente et ceci en première approximation. La deuxième est que la proposition précédente n'est pas applicable aux vraies étoiles barocliniques.

# 1.5 Conclusion du chapitre 1

Dans ce chapitre nous avons vu, à titre de rappel, les équations de l'hydrodynamique stellaire obtenues à partir du modèle du continuum qui englobent trois principes fondamentaux qui sont: la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie. Nous avons vu aussi qu'une étoile en état de rotation permanente possédait nécessairement une symétrie axiale et qu'en général elle possédait aussi un plan équatorial de symétrie. Ces propriétés mécaniques, surtout dans le cas des barotropes et des pseudo-barotropes, simplifient énormément les équations qui régissent la structure des étoiles. D'autre part, la rotation divise les étoiles en trois classes: (i) les barotropes, (ii) les pseudobarotropes, (iii) les vraies baroclines. Nous avons vu que les deux premières classes sont principalement caractérisées par le fait d'avoir une vitesse de rotation angulaire constante sur des cylindres centrés autour de l'axe de symétrie, condition qui assure le fait que la stratification de l'étoile est telle que les surfaces sur lesquels la pression, la densité et le potentiel restent constantes coïncident; au contraire, cette dernière condition n'est jamais obtenue dans le cas des vraies baroclines et l'interprétation de la forme de la surface du soleil devient d'autant plus compliquée du fait que les surfaces sur lesquels p,  $\rho$  et  $\Phi$  restent constantes sont légèrement inclinées l'une par rapport aux autres.

## **Chapitre 2**

# Détermination des paramètres de forme

## 2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons discuté quelques propriétés mécaniques générales des étoiles en état de rotation permanente. Bien que, pour des raisons physiques, nous devions distinguer entre les barotropes et les baroclines, la rotation à son tour divise les étoiles en trois classes: (i) les barotropes, (ii) les pseudo-barotropes, (iii) les vraies baroclines. Nous avons vu que les deux premières classes sont principalement caractérisées par le fait d'avoir une vitesse de rotation angulaire constante sur des cylindres centrés autour de l'axe de symétrie; au contraire, cette dernière condition n'est jamais obtenue dans le cas des vraies baroclines. Il est clair que dans les barotropes et les pseudo-barotropes est aussi inclus le cas de la rotation uniforme. Rappelons que pour les barotropes l'équation d'état relie p à  $\rho$ , à T et à des paramètres représentant la composition chimique de l'étoile. Excepté cette différence physique, barotropes et pseudo-barotropes en état de rotation permanente partagent les mêmes propriétés mécaniques.

Un grand nombre de techniques ont été conçues afin de déterminer l'équilibre des étoiles en rotation en général et des barotropes et pseudo-barotropes en particulier. La principale difficulté se résume dans le fait que la stratification réelle des étoiles de densité centrale n'est jamais connue à l'avance. Lorsque la vitesse de rotation différentielle décrit une loi cylindrique, d'après le théorème de Poincaré-Wavre de la section (1.4.3) la stratification est telle que les surfaces sur lesquels p,  $\rho$  et  $\Phi$  restent constantes coïncident, que la gravité effective dérive d'un potentiel, et que les lignes de force de la gravité effective sont perpendiculaires à ces surfaces. Or, dans le cas du soleil la rotation différentielle ne suit pas une loi cylindrique, et dans ce cas là l'interprétation de la surface du soleil devient plus compliquée par le fait que les surfaces sur lesquelles p,  $\rho$  et  $\Phi$  restent constant ne coïncident pas exactement. Mais d'une manière évidente, lorsque la rotation est lente l'écart à la symétrie sphérique est faible, nous pouvons donc utiliser les techniques de perturbation pour traiter les effets de la rotation comme de petites déformations superposées à un modèle sphérique connu, ce qui s'applique parfaitement au cas du soleil que nous allons étudier en état de rotation permanente considérée comme lente. Les méthodes théoriques qui vont être développées dans ce chapitre permettent justement de déterminer les paramètres de forme qui décrivent les déformations surfaciques du soleil dues à sa rotation et d'en déduire ainsi la forme du soleil. Les paramètres qui permettent de définir la forme des corps célestes en rotation et en particulier du soleil sont les moments gravitationnels  $J_n$  et l'aplatissement  $\varepsilon$ . Les moments gravitationnels interviennent dans l'expression du potentiel gravitationnel en tant que coefficients de projection sur la base des polynômes de Legendre dans le terme perturbatif du potentiel. Ces coefficients mesurent l'amplitude des distorsions qui déforment la surface du soleil. Le développement du potentiel gravitationnel en fonction de ces moments permet donc d'étudier l'écart de l'hélioïde<sup>1</sup> à la sphéricité.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Hélioïde faisant référence à un soleil aplati par analogie au géoïde qui fait référence à une terre aplatie.

# 2.2 Décomposition du potentiel gravitationnel en fonction des polynômes de Legendre – Moments gravitationnels

Soit Oxyz un système de référence d'origine O confondu avec le centre du soleil,  $\vec{r}$  représente le rayon vecteur par rapport à O d'un point s. Soit  $\vec{r}'$  le rayon vecteur d'un élément de masse dm =  $\rho(\vec{r}') dr'^3$  du soleil et  $\Delta = |\vec{r} - \vec{r}'|$  la distance entre cet élément et le point s (fig. 2.1).



Figure. 2.1

Le potentiel gravitationnel au point s est égale à :

$$V = -G \int dr'^3 \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$
(2.1)

Où G est la constante gravitationnelle. Soit  $\psi$  est l'angle entre  $\vec{r}$  et  $\vec{r}'$ , nous avons :

$$\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^2 = \Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi$$
 (2.2)

1

Ce qui nous donne :

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \left( 1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r}{r'}\cos\psi \right)^{-\frac{1}{2}}$$
(2.3)

L'équation (2.3) est une fonction génératrice des polynômes de Legendre, on peut l'écrire donc sous la forme :

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} = \frac{1}{r} \left( 1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r}{r'} \cos(\psi) \right)^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\psi) & \text{si } r > r' \\ \\ \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{-n-1} P_n(\cos\psi) & \text{si } r < r' \end{cases}$$
(2.4)

 $P_n$  est le polynôme de Legendre d'ordre n. En remplaçant (2.4) dans (2.1) on obtient l'expression générale du potentiel gravitationnel en tout point de l'espace :

$$V = -\frac{G}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \int \rho(\vec{r}') P_n(\cos \psi) \left(\frac{r'}{r}\right)^k d\tau'$$

$$ou \quad k = \begin{cases} = n & \text{si } r > r' \\ = -(n+1) & \text{si } r < r' \end{cases}$$
(2.5)

Si l'axe de rotation du soleil est dirigé selon l'axe Oz, alors la densité  $\rho(\vec{r})$ en coordonnées sphériques ne dépend pas de la coordonnée azimutale (symétrie axiale). L'équation (2.5) pour r > r' développé dans le cadre de la théorie des perturbations permet d'écrire en coordonnées sphériques le potentiel extérieur du soleil sous la forme :

$$V_{\text{ext}}(r,\theta) = -\frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_0}{r}\right)^n J_n P_n(\cos\theta)$$
(2.6)

où M est la masse du soleil,  $R_0$  son rayon moyen,  $J_n$  sont des constantes sans dimensions appelées moments gravitationnels d'ordre n et  $\theta$  l'angle à l'axe de rotation (colatitude du soleil). Les deux premières constantes  $J_0$  et  $J_1$  sont respectivement égales à 1 et 0. De plus si on considère la symétrie par rapport à l'équateur alors tous les moments d'ordre impair sont nuls, on peut donc écrire (2.6) sous la forme suivante avec n étant un nombre pair :

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r},\theta) = -\frac{GM}{r} \left( 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R_0}{r} \right)^n J_n P_n(\cos\theta) \right)$$
(2.7)

Dans le cas d'un soleil parfaitement sphérique le potentiel gravitationnel du soleil serait égal à:

$$V_{0_{ext}}(r) = -\frac{GM}{r}$$
(2.8)

Nous définissons le terme perturbateur ou la fonction perturbatrice par :

$$V_{ext}(r,\theta) - V_{0_{ext}}(r) = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_0}{r}\right)^n J_n P_n(\cos\theta)$$
(2.9)

## 2.3 Calcul des moments gravitationnels et de l'aplatissement

Nous allons maintenant voir les méthodes théoriques qui vont nous permettre de déterminer les moments gravitationnels solaires. Ces méthodes consistent à calculer le potentiel gravitationnel interne du soleil via une équation différentielle qui résulte de la combinaison de l'équation de l'équilibre hydrostatique du soleil et de l'équation de poisson de son potentiel gravitationnel. La valeur de ce potentiel en surface nous donnera la valeur du moment gravitationnel correspondant à l'ordre n étudié.

#### 2.3.1 Expression de la vitesse angulaire de rotation

Le choix d'une expression de la vitesse de rotation différentielle décrivant une loi cylindrique simplifie énormément les choses. En effet, comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre, d'après le théorème de Poincaré-Wavre de la section (1.4.3), cette condition nous fournit le fait que la stratification du soleil soit telle que les surfaces sur lesquelles p,  $\rho$  et  $\Phi$  restent constantes coïncident, et que la force centrifuge dérive d'un potentiel et de ce fait la gravité effective dérive automatiquement d'un potentiel, et que les lignes de force de la gravité effective sont perpendiculaires à ces surfaces. Hélas, dans notre cas la vitesse de rotation du soleil n'est pas constante sur des surfaces cylindriques (n'est pas une loi cylindrique), l'interprétation de la forme de la surface du soleil devient d'autant plus compliquée du fait que les surfaces sur lesquelles p,  $\rho$  et  $\Phi$  restent constantes ne coïncident pas exactement. Néanmoins, cette rotation peut être considérée comme lente ce qui nous fournira un écart à la symétrie sphérique faible, nous pouvons donc utiliser les techniques de perturbation pour traiter les effets de la rotation comme de petites déformations superposées à un modèle sphérique connu. Dans les développements qui vont suivre, nous allons garder la vitesse de rotation différentielle sous la forme générale  $\Omega = \Omega(\mathbf{r}, \theta)$ , nous ne donnerons une expression détaillée de cette dernière que dans la section (2.4) où nous présenterons quelques modèles de rotation utilisés dans notre travail. Toutefois nous pouvons dire que cette vitesse  $\Omega = \Omega(r, \theta)$ est différentielle du fait de sa dépendance radiale à travers r et sa dépendance latitudinale à travers la colatitude du soleil $\theta$ . Son expression est donnée en coordonnées sphériques (r, $\theta$ , $\phi$ ), où la dépendance en  $\varphi$  n'apparaît car  $\Omega$  présente une symétrie axiale. Sachant que le soleil effectue sa rotation autour de son axe de symétrie, sa vitesse angulaire rotation  $\hat{\Omega}$  est donc dirigée selon Oz qui est confondu avec l'axe de symétrie. Donc, en coordonnées sphériques  $\vec{\Omega} = (\Omega(r,\theta)\cos\theta, -\Omega(r,\theta)\sin\theta, 0)$ , et sachant que la vitesse linéaire de rotation  $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$  on aura aussi en coordonnées sphériques :

$$v_r = 0, v_\theta = 0, v_\varphi = \Omega(r,\theta) r \sin\theta$$
 (2.10)

#### 2.3.2 L'équation de l'équilibre hydrostatique du soleil

En prenant en compte les hypothèses énoncées dans (1.4.2), les équations de Navier-Stokes (1.3) se réduisent à l'équation d'Euler qui est :

$$(\vec{\mathbf{v}}.\vec{\nabla})\,\vec{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\mathbf{p} - \vec{\nabla}\mathbf{V} \tag{2.11}$$

Le terme –  $(\vec{v}.\vec{\nabla})$   $\vec{v}$  représente les forces centrifuges qui dérivent d'un potentiel dans le cas d'une vitesse de rotation différentielle qui décrit une loi cylindrique, donc on peut écrire que :

$$\vec{F}_{\text{centrifuge}} = -(\vec{v}.\vec{\nabla})\,\vec{v} = -\vec{\nabla}Q \tag{2.12}$$

où Q représente le potentiel centrifuge. L'équation (2.11) peut s'écrire donc sous la forme :

$$\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\mathbf{p} = -\vec{\nabla}\mathbf{U} = -\vec{\nabla}(\mathbf{V} + \mathbf{Q}) \tag{2.13}$$

où U = V + Q est le potentiel total. L'équation (2.11) représente l'équation de l'équilibre hydrostatique du soleil. En considérant la symétrie axiale ( $\partial/\partial \varphi=0$ ), d'une manière générale l'équation (2.11) s'écrit donc en coordonnées sphériques sous la forme (annexe A) :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{v}_{\varphi}^2}{\mathbf{r}}$$
(2.14)

$$\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{v_{\phi}^2 \cot\theta}{r}$$
(2.15)

où  $\theta$  est la colatitude du soleil. En remplaçant v<sub>o</sub> par son expression on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} = -\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{r}} + \Omega^2(\mathbf{r}, \theta) \mathbf{r} \rho \sin^2 \theta$$
(2.16)

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \theta} = -\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta} + \Omega^2(\mathbf{r}, \theta) \, \mathbf{r}^2 \rho \sin\theta \cos\theta \tag{2.17}$$

En posant  $u = \cos\theta$  implique que  $\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\theta} = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial u}$ , les équations (2.16) et (2.17) deviennent:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} + \rho \, \mathbf{r} \, \Omega^2(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \, (1 - \mathbf{u}^2) \tag{2.18}$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{u}} = -\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{u}} - \rho \,\mathbf{r}^2 \,\Omega^2(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \,\mathbf{u}$$
(2.19)

Comme la rotation du soleil est lente, l'écart à la sphéricité est supposé faible, il est possible donc d'exprimer le potentiel gravitationnel interne V(r,u) la densité  $\rho(r,u)$  ainsi que sa pression p(r,u) sous la forme de quantités non-perturbées (symétrie sphérique = pas de rotation) V<sub>0</sub>,  $\rho_0$ , p<sub>0</sub>, plus des quantités perturbées décrivant les petits écarts à la sphéricité (symétrie non-sphérique = existence de la rotation) V<sub>1</sub>,  $\rho_1$ , p<sub>1</sub>, sous la forme suivante (ici, *f* représente une fonction quelconque) :

$$f(\mathbf{r},\mathbf{u}) = f_0(\mathbf{r}) + f_1(\mathbf{r},\mathbf{u})$$
(2.20)

En considérant que l'accélération centrifuge faible par rapport au terme gravitationnel, nous pouvons développer les termes perturbés en séries des polynômes de Legendre dont les coefficients sont fonction de la variable r :

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \sum_{l=1}^{\infty} f_{1l}(\mathbf{r}) \mathbf{P}_l(\mathbf{u})$$
(2.21)

En exprimant V,  $\rho$ , p sous la forme (2.20) et en remplaçant les expressions obtenues dans les équations (2.18) et (2.19) et en traitant aussi  $\Omega^2$  comme une quantité perturbée, nous obtenons que les termes non-perturbés de symétrie sphérique obéissent à l'équation :

$$\rho_0 \frac{\mathrm{d} \mathrm{V}_0}{\mathrm{d} \mathrm{r}} = -\frac{\mathrm{d} \mathrm{p}_0}{\mathrm{d} \mathrm{r}} \tag{2.22}$$

tandis que les termes perturbés obéissent aux équations :

$$\rho_0 \frac{\partial V_1}{\partial r} + \rho_1 \frac{\partial V_0}{\partial r} = -\frac{\partial p_1}{\partial r} + \rho_0 r \Omega^2(r, u) (1 - u^2)$$
(2.23)

$$\rho_0 \frac{\partial V_1}{\partial u} = -\frac{\partial p_1}{\partial u} - \rho_0 r^2 \Omega^2(r, u) u$$
(2.24)

Ces équations sont obtenues en négligeant les produits qui ne contiennent que des quantités perturbées devant les produits mixtes constitués de quantités perturbées et non-perturbées. En utilisant la continuité en surface du potentiel gravitationnel V au potentiel V<sub>ext</sub>, on compare l'expression V(r, u) = V<sub>0</sub>(r) +  $\sum_{l=1}^{1} V_{ll}(r) P_l(u)$  à l'expression (2.7), on en déduit que :

$$J_{l} = \frac{R_{0}}{G M_{0}} V_{ll}(R_{0})$$
(2.25)

#### 2.3.3 L'équation de Poisson

L'équation de Poisson qui relie le potentiel gravitationnel et la densité est donnée par la relation suivante (éq. (1.15)) :

$$\nabla^2 \mathbf{V} = 4\pi \,\mathbf{G}\,\,\rho \tag{2.26}$$

où  $\nabla^2$  est le Laplacien. En développant  $\nabla^2$  en coordonnées sphériques avec  $\partial/\partial \phi=0$  (symétrie axiale), et en prenant en compte les équations (2.20) et (2.21) nous obtenons pour les quantités non-perturbées :

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{V}_0}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{\mathrm{r}} \frac{\mathrm{d}\mathrm{V}_0}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{\mathrm{r}^2} \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}} \left( \mathrm{r}^2 \frac{\partial \mathrm{V}_0}{\partial \mathrm{r}} \right) = 4\pi \mathrm{G} \rho_0 \tag{2.27}$$

tandis que pour les quantités perturbées on obtient :

$$\frac{d^2 V_{ll}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV_{ll}}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} V_{ll} = 4\pi G \rho_{ll}$$
(2.28)

#### 2.3.4 Méthodes théoriques de détermination des moments gravitationnels

Dans l'objectif de déterminer les moments gravitationnels, nous allons développer nos calculs selon deux méthodes différentes :

- La première méthode est dite "Méthode Directe". Elle consiste à calculer le potentiel gravitationnel interne du soleil via une équation différentielle qui résulte de la combinaison des équations (2.23), (2.24) et (2.28). La valeur de ce potentiel en surface nous donnera la valeur du moment gravitationnel correspondant au degré de perturbation étudié. Donc dans cette méthode nous aurons à résoudre une équation différentielle.
- La deuxième méthode est dite "Méthode de Green". Cette méthode va plus loin dans les développements théoriques et ceci en transformant l'équation différentielle obtenue par la "Méthode Directe" en une équation intégrale à travers la fonction de Green. Ainsi dans cette méthode nous aurons à résoudre une intégrale.

Dans ce qui suit nous allons restreindre nos développements à l'étude des moments gravitationnels d'ordre l=2 et l=4 respectivement J<sub>2</sub> et J<sub>4</sub> qui correspondent respectivement au premier et au second ordre des perturbations.

#### **Méthode Directe**

L'étude du moment gravitationnel d'ordre l (J<sub>l</sub>) consiste à projeter les équations (2.23) et (2.24) sur le polynôme de Legendre correspondant. Ainsi pour l'étude du moment quadrupolaire J<sub>2</sub> et J<sub>4</sub> nous allons projeter ces équations respectivement sur P<sub>2</sub> et P<sub>4</sub>.

**Développement au premier ordre (l=2) :** En multipliant les deux côtés de l'équation (2.23) par  $\frac{5}{2}P_2(u) = \frac{5}{2}\frac{(3u^2-1)}{2}$  et en intégrant le tout par rapport à u, on obtient :

$$\rho_0 \frac{dV_{12}}{dr} + \rho_{12} \frac{dV_0}{dr} = -\frac{dp_{12}}{dr} + \rho_0 r \int_{-1}^{+1} \frac{5}{3} (1 - P_2(u)) P_2(u) \Omega^2(r, u) du$$
(2.29)

Si nous effectuons le même opération avec l'équation (2.24) nous n'obtiendrons que des termes nuls, pour éviter cela on intègre d'abord cette équation par rapport à u ensuite on projette sur P<sub>2</sub>, l'équation (2.24) devient donc :

$$\rho_0 V_{12} = -p_{12} - \rho_0 r^2 \int_{-1}^{+1} \left[ \int_{-1}^{u} \Omega^2(r, v) v \, dv \right] \frac{5}{2} P_2(u) \, du$$
(2.30)

En utilisant l'intégration par partie, la double intégrale dans l'équation (2.30) peut s'écrire :

$$\int_{-1}^{+1} \left[ \int_{-1}^{u} \Omega^{2}(\mathbf{r}, v) v \, dv \right] \frac{5}{2} P_{2}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u} = \frac{5}{4} \left\{ \left[ \left( u^{3} - u \right) \int_{-1}^{u} \Omega^{2}(\mathbf{r}, v) v \, dv \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \left( u^{3} - u \right) u \Omega^{2}(\mathbf{r}, u) \, du \right\} \\ = \frac{5}{4} \int_{-1}^{1} \left( u^{2} - u^{4} \right) \Omega^{2}(\mathbf{r}, u) \, du$$

$$(2.31)$$

L'équation (2.30) s'écrit donc :

$$\rho_0 \mathbf{V}_{12} = -\mathbf{p}_{12} - \rho_0 \,\mathbf{r}^2 \,\mathbf{B}_2(\Omega) \tag{2.32}$$

avec :

$$B_{2}(\Omega) = \frac{5}{4} \int_{-1}^{1} (u^{2} - u^{4}) \Omega^{2}(r, u) du \qquad (2.33)$$

En dérivant (2.32) par rapport à r on obtient :

$$\rho_0 \frac{\mathrm{d} \mathrm{V}_{12}}{\mathrm{d} \mathrm{r}} + \mathrm{V}_{12} \frac{\mathrm{d} \rho_0}{\mathrm{d} \mathrm{r}} = -\frac{\mathrm{d} \mathrm{p}_{12}}{\mathrm{d} \mathrm{r}} - \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}} \left( \rho_0 \mathrm{r}^2 \mathrm{B}_2(\Omega) \right)$$
(2.34)

En utilisant (2.34) pour éliminer  $\frac{dp_{12}}{dr}$  de l'équation (2.29) on obtient :

$$\rho_{12} \frac{dV_0}{dr} = V_{12} \frac{d\rho_0}{dr} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \rho_0 r^2 B_2(\Omega) \right] + \rho_0 r \int_{-1}^{1} \frac{5}{3} \left( 1 - P_2(u) \right) P_2(u) \Omega^2(r, u) \, du$$
(2.35)

D'autre part de l'équation de Poisson pour l'ordre l = 2 on obtient :

$$\frac{d^2 V_{12}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV_{12}}{dr} - \frac{6}{r^2} V_{12} = 4\pi G \rho_{12}$$
(2.36)

A partir de cette équation on remplace l'expression de  $\rho_{12}$  dans l'équation (2.35) et en prenant en compte que  $\frac{dV_0}{dr} = \frac{G M_r}{r^2}$ , avec  $M_r = 4\pi \int_0^r \rho_0 r'^2 dr'$  étant la masse contenue d'une sphère de rayon r, on obtient :

$$\frac{d^{2}V_{12}}{dr^{2}} + \frac{2}{r}\frac{dV_{12}}{dr} - \frac{6}{r^{2}}V_{12} = \frac{4\pi r^{2}}{M_{r}} \left[ V_{12}\frac{d\rho_{0}}{dr} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \rho_{0}r^{2} B_{2}(\Omega) \right] + \rho_{0}r \int_{-1}^{1} \frac{5}{3} (1 - P_{2}(u)) P_{2}(u) \Omega^{2}(r, u) du \right]$$
(2.37)

En remplaçant  $B_2(\Omega)$  son expression et moyennant quelques transformations on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d^{2}V_{12}}{dr^{2}} + \frac{2}{r}\frac{dV_{12}}{dr} - \frac{6}{r^{2}}V_{12} &= \frac{4\pi r^{2}}{M_{r}} \left\{ V_{12}\frac{d\rho_{0}}{dr} + r^{2}\frac{\partial}{\partial r} \left[\rho_{0} B_{2}(\Omega)\right] + \rho_{0}r \left[ \frac{2}{\int_{-1}^{1} \frac{5}{3}(1 - P_{2}(u))P_{2}(u)\Omega^{2}(r, u) du \right] \right\} \\ &= \frac{4\pi r^{2}}{M_{r}} \left\{ V_{12}\frac{d\rho_{0}}{dr} + r^{2}\frac{\partial}{\partial r} \left[\rho_{0} B_{2}(\Omega)\right] - \rho_{0}r \int_{-1}^{1} \frac{5}{4}(u^{2} - 1)(5u^{2} - 1)\Omega^{2}(r, u) du \right\} \\ &= \frac{4\pi r^{2}}{M_{r}} \left\{ V_{12}\frac{d\rho_{0}}{dr} + r^{2}\frac{\partial}{\partial r} \left[\rho_{0}\frac{5}{4}\int_{-1}^{1}(u^{2} - u^{4})\Omega^{2}(r, u) du \right] \right\} \end{aligned}$$

(2.38)

Par commodité de calcul, on écrit cette équation sous la forme d'une équation sans dimension, pour cela on pose :

$$x = \frac{r}{R_0}, U(x) = \frac{4\pi\rho_0 r^3}{M_r}, K(x) = \frac{d\ln\rho_0}{d\ln r}, y_{12}(x) = \frac{V_{12}(r)}{\Omega_*^2 R_0^2}$$
(2.39)

où  $\Omega_*$  est une vitesse de rotation angulaire de référence que l'on spécifiera par le suite et U(x) et K(x) sont des données provenant de modèles solaires utilisé. Nous obtenons ainsi l'équation sans dimension suivante :

 $\frac{d^{2}y_{12}}{dx^{2}} + \frac{2}{x}\frac{dy_{12}}{dx} - (6 + U(x)K(x))\frac{y_{12}}{x^{2}} = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{\Omega_{*}}\right)^{2} \begin{bmatrix} U(x)K(x)\int_{-1}^{1} (u^{2} - u^{4})\Omega^{2}(x,u) du + U(x)x\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{-1}^{1} (u^{2} - u^{4})\Omega^{2}(x,u) du\right) - U(x)\int_{-1}^{1} (u^{2} - 1)(5u^{2} - 1)\Omega^{2}(x,u) du \end{bmatrix}$  (2.40)

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients non constants et avec second membre non constant. Du fait de la forme analytique du modèle de rotation décrivant  $\Omega(x,u)$  que nous présenterons dans la section (2.4), les intégrales dans cette équation sont résolues analytiquement, et donc, le second membre se réduit à une fonction de *x* seulement.

L'intégration de cette équation doit se faire du centre à la surface du soleil avec comme conditions aux limites x  $(dy_{12}/dx) - 2y_{12} = 0$  à x = 0, et x  $(dy_{12}/dx) + 3y_{12} = 0$  à x = 1. Donc nous nous retrouvons face à un problème à deux conditions aux limites. La première condition reflète le fait que la perturbation s'annule au centre tandis que la seconde reflète la continuité en surface du potentiel gravitationnel V au potentiel extérieur V<sub>ext</sub>. Donc, notre problème consiste à résoudre un problème de deux valeurs aux limites.

Enfin la valeur du moment quadrupolaire  $J_2$  est donnée par la relation (2.25) :

$$J_{2} = \frac{R_{0}}{G M_{0}} V_{12}(R_{0}) = \frac{\Omega_{*}^{2} R_{0}^{3}}{G M_{0}} y_{12}(1)$$
(2.41)

**Développement au second ordre (l=4) :** En multipliant cette fois-ci les deux côtés de l'équation (2.23) par  $\frac{9}{2}P_4(u) = \frac{9}{2}\left(\frac{35}{8}u^4 - \frac{15}{4}u^2 + \frac{3}{8}\right)$  et en intégrant le tout par rapport à u, on obtient :

$$\rho_0 \frac{dV_{14}}{dr} + \rho_{14} \frac{dV_0}{dr} = -\frac{dp_{14}}{dr} + \rho_0 r \int_{-1}^{+1} \frac{9}{2} (1 - u^2) P_4(u) \Omega^2(r, u) du$$
(2.42)

Si nous effectuons le même opération avec l'équation (2.24) nous n'obtiendrons que des termes nuls, pour éviter cela on intègre d'abord cette équation par rapport à u ensuite on projette sur P<sub>4</sub>, l'équation (2.24) devient donc :

$$\rho_0 V_{14} = -p_{14} - \rho_0 r^2 \int_{-1}^{+1} \left[ \int_{-1}^{u} \Omega^2(r, v) v \, dv \right] \frac{9}{2} P_4(u) \, du$$
(2.43)

En utilisant l'intégration par partie, la double intégrale dans l'équation (2.43) peut s'écrire :

$$\int_{-1}^{+1} \left[ \int_{-1}^{u} \Omega^{2}(\mathbf{r}, v) v \, dv \right] \frac{9}{2} P_{4}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u} = \frac{9}{2} \begin{cases} \left[ \left( \frac{7}{8} u^{5} - \frac{5}{4} u^{3} + \frac{3}{8} u \right) \int_{-1}^{u} \Omega^{2}(\mathbf{r}, v) v \, dv \right]_{-1}^{1} \\ - \int_{-1}^{1} \left( \frac{7}{8} u^{5} - \frac{5}{4} u^{3} + \frac{3}{8} u \right) u \Omega^{2}(\mathbf{r}, u) \, du \end{cases} \\ = \frac{9}{16} \int_{-1}^{1} \left( -7u^{6} + 10u^{4} - 3u^{2} + 4u \right) \Omega^{2}(\mathbf{r}, u) \, du \end{cases}$$
(2.44)

L'équation (2.43) s'écrit donc :

$$\rho_0 \mathbf{V}_{14} = -\mathbf{p}_{14} - \rho_0 \mathbf{r}^2 \mathbf{B}_4(\Omega) \tag{2.45}$$

avec :

$$B_4(\Omega) = \frac{9}{16} \int_{-1}^{1} \left( -7u^6 + 10u^4 - 3u^2 + 4u \right) \Omega^2(r, u) \, du$$
 (2.46)

En dérivant (2.45) par rapport à r on obtient :

$$\rho_0 \frac{\mathrm{d}V_{14}}{\mathrm{d}r} + V_{14} \frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{d}p_{14}}{\mathrm{d}r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho_0 r^2 \mathbf{B}_4(\Omega)\right)$$
(2.47)

En utilisant (2.47) pour éliminer  $\frac{dp_{14}}{dr}$  de l'équation (2.42) on obtient :

$$\rho_{14} \frac{dV_0}{dr} = V_{14} \frac{d\rho_0}{dr} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \rho_0 r^2 B_4(\Omega) \right] + \rho_0 r \int_{-1}^{+1} \frac{9}{16} \left( 1 - u^2 \right) (35u^4 - 30u^2 + 3) \Omega^2(r, u) \, du \qquad (2.48)$$

D'autre part de l'équation de Poisson pour l'ordre l = 4 on obtient :

$$\frac{d^2 V_{14}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV_{14}}{dr} - \frac{20}{r^2} V_{14} = 4\pi G \rho_{14}$$
(2.49)

A partir de cette équation on remplace l'expression de  $\rho_{14}$  dans l'équation (2.48), on obtient :

$$\frac{d^{2}V_{14}}{dr^{2}} + \frac{2}{r}\frac{dV_{14}}{dr} - \frac{20}{r^{2}}V_{14} = \frac{4\pi r^{2}}{M_{r}} \begin{bmatrix} V_{14}\frac{d\rho_{0}}{dr} + \frac{\partial}{\partial r} [\rho_{0}r^{2} B_{4}(\Omega)] - \\ \rho_{0}r \int_{-1}^{+1} \frac{9}{16} (u^{2} - 1)(35u^{4} - 30u^{2} + 3)\Omega^{2}(r, u) du \end{bmatrix}$$

$$= \frac{4\pi r^{2}}{M_{r}} \begin{cases} V_{14}\frac{d\rho_{0}}{dr} + r^{2}\frac{\partial}{\partial r} [\rho_{0} B_{4}(\Omega)] + 2\rho_{0}r B_{4}(\Omega) - \\ \rho_{0}r \int_{-1}^{+1} \frac{9}{16} (u^{2} - 1)(35u^{4} - 30u^{2} + 3)\Omega^{2}(r, u) du \end{cases}$$
(2.50)

En remplaçant  $B_4(\Omega)$  son expression et moyennant quelques transformations on obtient :

$$\frac{d^{2}V_{14}}{dr^{2}} + \frac{2}{r}\frac{dV_{14}}{dr} - \frac{20}{r^{2}}V_{14} = \frac{4\pi r^{2}}{M_{r}} \begin{cases} V_{14}\frac{d\rho_{0}}{dr} + r^{2}\frac{\partial}{\partial r} \left[\rho_{0}\frac{9}{16}\int_{-1}^{1} (-7u^{6} + 10u^{4} - 3u^{2} + 4u)\Omega^{2}(r, u) du \right] \\ + 2\rho_{0}r\frac{9}{16}\int_{-1}^{1} (-7u^{6} + 10u^{4} - 3u^{2} + 4u)\Omega^{2}(r, u) du \\ - \rho_{0}r\int_{-1}^{+1}\frac{9}{16}(u^{2} - 1)(35u^{4} - 30u^{2} + 3)\Omega^{2}(r, u) du \end{cases}$$

$$(2.51)$$

En utilisant les mêmes variables adimensionnelles (2.39), nous obtenons comme pour l'ordre l=2 l'équation sans dimension suivante :

$$\frac{d^{2}y_{14}}{dx^{2}} + \frac{2}{x}\frac{dy_{14}}{dx} - (20 + U(x)K(x))\frac{y_{14}}{x^{2}} = \frac{9}{16}\left(\frac{1}{\Omega_{*}}\right)^{2} \begin{bmatrix} U(x)K(x)\int_{-1}^{1} \left(-7u^{6} + 10u^{4} - 3u^{2} + 4u\right)\Omega^{2}(x,u)\,du + U(x)x\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{-1}^{1} \left(-7u^{6} + 10u^{4} - 3u^{2} + 4u\right)\Omega^{2}(x,u)\,du\right) + 2U(x)\int_{-1}^{1} \left(-7u^{6} + 10u^{4} - 3u^{2} + 4u\right)\Omega^{2}(x,u)\,du - U(x)\int_{-1}^{1} \left(u^{2} - 1\right)\left(35u^{4} - 30u^{2} + 3\right)\Omega^{2}(x,u)\,du - U(x)\int_{-1}^{1} \left(u^{2} - 1\right)\left(35u^{4} - 30u^{2} + 3\right)\Omega^{2}(x,u)\,du - U(x)\int_{-1}^{1} \left(u^{2} - 1\right)\left(35u^{4} - 30u^{2} + 3\right)\Omega^{2}(x,u)\,du - U(x)\int_{-1}^{1} \left(u^{2} - 1\right)\left(35u^{4} - 30u^{2} + 3\right)\Omega^{2}(x,u)\,du - U(x)\int_{-1}^{1} \left(u^{2} - 1\right)\left(35u^{4} - 30u^{2} + 3\right)\Omega^{2}(x,u)\,du - U(x)\int_{-1}^{1} \left(u^{2} - 1\right)\left(35u^{4} - 30u^{2} + 3\right)\Omega^{2}(x,u)\,du - U(x)\int_{-1}^{1} \left(u^{2} - 1\right)\left(35u^{4} - 30u^{2} + 3\right)\Omega^{2}(x,u)\,du - U(x)\int_{-1}^{1} \left(u^{2} - 1\right)\left(35u^{4} - 30u^{2} + 3\right)\Omega^{2}(x,u)\,du - U(x)\int_{-1}^{1} \left(u^{2} - 1\right)\left(35u^{4} - 30u^{2} + 3\right)\Omega^{2}(x,u)\,du - U(x)\int_{-1}^{1} \left(u^{2} - 1\right)\left(35u^{4} - 30u^{2} + 3\right)\Omega^{2}(x,u)\,du - U(x)\int_{-1}^{1} \left(u^{2} - 1\right)\left(35u^{4} - 30u^{2} + 3\right)\Omega^{2}(x,u)\,du$$

C'est aussi une équation différentielle du second ordre à coefficients non constants et avec second membre non constant. Du fait de la forme analytique du modèle de rotation décrivant  $\Omega(x,u)$ , les intégrales dans cette équation sont résolues analytiquement, et donc, le second membre se réduit à une fonction de *x* seulement.

L'intégration de cette équation doit se faire du centre à la surface du soleil avec cette fois-ci comme conditions aux limites x  $(dy_{14}/dx) - 4y_{14} = 0$  à x = 0, et x  $(dy_{14}/dx) + 5y_{14} = 0$  à x = 1. Comme dans le cas *l*=2, nous nous retrouvons aussi face à un problème à deux conditions aux limites. La première condition reflète le fait que la perturbation s'annule au centre tandis que la seconde reflète la continuité en surface du potentiel gravitationnel V au potentiel extérieur V<sub>ext</sub>.

Enfin la valeur du moment octopolaire  $J_4$  est donnée par la relation (2.25) :

$$J_{4} = \frac{R_{0}}{G M_{0}} V_{14}(R_{0}) = \frac{\Omega_{*}^{2} R_{0}^{3}}{G M_{0}} y_{14}(1)$$
(2.53)

#### Méthode de Green

**Développement au premier ordre (l=2) :** A partir de l'équation (2.38) définissons maintenant l'opérateur différentiel linéaire  $L_2$ :

$$L_{2}V_{12} \equiv \left[\frac{d}{dr}\left(r^{2}\frac{d}{dr}\right) - \left(6 + \frac{4\pi r^{4}}{M_{r}}\frac{d\rho_{0}}{dr}\right)\right]V_{12}$$
(2.54)

et une fonction  $F_2$ :

$$F_{2}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi r^{4}}{M_{r}} \left\{ r^{2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \rho_{0} B_{2}(\Omega) \right] + \rho_{0} r \left[ 2 B_{2}(\Omega) + \int_{-1}^{1} \frac{5}{3} (1 - P_{2}(u)) P_{2}(u) \Omega^{2}(r, u) du \right] \right\}$$
  
$$= \frac{4\pi r^{4}}{M_{r}} \left\{ r^{2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \rho_{0} B_{2}(\Omega) \right] - \rho_{0} r \int_{-1}^{1} \frac{5}{4} (u^{2} - 1) (5u^{2} - 1) \Omega^{2}(r, u) du \right\}$$
(2.55)

de sorte que V<sub>12</sub> est solution de l'équation  $L_2V_{12} = F_2(r)$ . Cette équation peut être résolue en utilisant la fonction de Green (Annexe B). Pour  $r > R_0$  la densité  $\rho_0 = 0$  par conséquent  $F_2(r) = 0$ . Une solution exacte est donc V<sub>12</sub> =  $r^{-3}$ . Si une autre solution  $\psi_2$  est construite de telle sorte qu'elle soit régulière en r = 0, la solution générale est :

$$V_{12}(R) = \int_{0}^{\infty} G_{2}(R, z) F_{2}(z) dz$$
(2.56)

avec la fonction de Green  $G_2(R,z)$ :

$$G_{2}(R,z) = \begin{cases} \frac{\psi_{2}(R) z^{-3}}{z^{2}W_{2}(z)} & 0 \le R \le z \\ \frac{\psi_{2}(z) R^{-3}}{z^{2}W_{2}(z)} & 0 \le z \le R \end{cases}$$
(2.57)

où W<sub>2</sub> (z) est le Wronskien des solutions r<sup>-3</sup> et  $\psi_2$ :

$$W_{2}(z) = \begin{vmatrix} \psi_{2} & z^{-3} \\ \psi_{2}' & -3z^{-4} \end{vmatrix} = -z^{-6} \frac{d}{dz} (z^{3} \psi_{2})$$
(2.58)

Du moment que r<sup>-3</sup> n'est pas solution de  $L_2\psi_2 = 0$  pour r < R<sub>0</sub>, cette équation n'est valide que pour R ≥ R<sub>0</sub>. Nous nous intéressons dans notre cas à la solution V<sub>12</sub> à R = R<sub>0</sub>. Si nous remplaçons dans (2.56) R par R<sub>0</sub>, z<sup>2</sup>W<sub>2</sub>(z) peut être remplacé par R<sub>0</sub><sup>2</sup>W<sub>2</sub>(R<sub>0</sub>), ce qui peut être vérifié en remplaçant l'équation (2.56) dans l'équation (2.38). Sachant aussi que  $F_2(r) = 0$  pour r > R<sub>0</sub>, l'expression de V<sub>12</sub>(R<sub>0</sub>) se simplifie en :

$$V_{12}(R_0) = -R_0^{-3} \left[ r^{-4} \frac{d}{dr} (r^3 \psi_2) \right]^{-1} \bigg|_{r=R_0} \int_0^{R_0} \psi_2(z) F_2(z) dz$$
(2.59)

En remplaçant  $F_2(z)$  par leurs expressions respectives, on obtient :

$$V_{12}(R_{0}) = -R_{0} \left[ r^{3} \frac{d\psi_{2}}{dr} + 3r^{2}\psi_{2} \right]^{-1} \bigg|_{r=R_{0}} \times \int_{0}^{R_{0}} \left\{ \frac{4\pi r^{6}\psi_{2}(r)}{M_{r}} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \rho_{0} B_{2}(\Omega) \right] - \frac{4\pi r^{5}\psi_{2}(r)}{M_{r}} \int_{-1}^{1} \frac{5}{4} \left( u^{2} - 1 \right) \left( 5u^{2} - 1 \right) \Omega^{2}(r, u) du \right] dr$$

$$(2.60)$$

En utilisant les variables les variables adimensionnelles (2.39), l'équation (2.60) devient :

$$V_{12}(1) = -R_0^2 \left[ x^3 \frac{d\psi_2(x)}{dx} + 3x^2 \psi_2(x) \right]^{-1} \bigg|_{x=1} \times \int_0^1 \left\{ \begin{array}{l} U(x)K(x)x^2 B_2(\Omega) + U(x)x^3 \frac{\partial B_2(\Omega)}{\partial x} \\ U(x)x^2 \int_{-1}^1 \frac{5}{4} (u^2 - 1)(5u^2 - 1)\Omega^2(x, u) \, du \end{array} \right\} \psi_2(x) \, dx$$

$$(2.61)$$

En remplaçant  $B_2(\Omega)$  son expression, on obtient :

$$V_{12}(1) = -R_0^2 \left[ x^3 \frac{d\psi_2(x)}{dx} + 3x^2 \psi_2(x) \right]^{-1} \Big|_{x=1} \frac{5}{4} \times \int_0^1 \left\{ \begin{array}{l} U(x)K(x) x^2 \int_{-1}^1 (u^2 - u^4) \Omega^2(x, u) \ du + \\ U(x)x^3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{-1}^1 (u^2 - u^4) \Omega^2(x, u) \ du \right) - \\ U(x)x^2 \int_{-1}^1 (u^2 - 1) (5u^2 - 1) \Omega^2(x, u) \ du \end{array} \right\} \psi_2(x) dx$$

$$(2.62)$$

Comme dans (2.41) l'expression de  $J_2$  est :

$$J_2 = \frac{R_0}{G M_0} V_{12}(1)$$
 (2.63)

**Développement au second ordre (l=4) :** A partir de l'équation (2.51), définissons aussi l'opérateur différentiel linéaire  $L_4$ :

$$L_{4}V_{14} = \left[\frac{d}{dr}\left(r^{2}\frac{d}{dr}\right) - \left(20 + \frac{4\pi r^{4}}{M_{r}}\frac{d\rho_{0}}{dr}\right)\right]V_{14}$$
(2.64)

et une fonction  $F_4$ :

$$F_{4}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi \,\mathbf{r}^{4}}{M_{r}} \left\{ \mathbf{r}^{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[ \rho_{0} \,\mathbf{B}_{4}(\Omega) \right] + 2\rho_{0} \mathbf{r} \,\mathbf{B}_{4}(\Omega) - \rho_{0} \mathbf{r} \int_{-1}^{+1} \frac{9}{16} \left( \mathbf{u}^{2} - 1 \right) (35\mathbf{u}^{4} - 30\mathbf{u}^{2} + 3) \Omega^{2}(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \,\mathrm{du} \right\}$$
(2.65)

de sorte que V<sub>14</sub> est solution de l'équation  $L_4V_{14} = F_4(r)$ . Cette équation peut être résolue en utilisant la fonction de Green (Anexe C). Pour  $r > R_0$  la densité  $\rho_0 = 0$  par conséquent  $F_4(r) = 0$ . Une solution exacte est donc V<sub>14</sub> =  $r^{-5}$ . Si une autre solution  $\psi_4$  est construite de telle sorte qu'elle soit régulière en r = 0, la solution générale est :

$$V_{14}(R) = \int_{0}^{\infty} G_4(R,z) F_4(z) dz$$
 (2.66)

avec la fonction de Green  $G_4(R,z)$ :

$$G_{4}(R,z) = \begin{cases} \frac{\psi_{4}(R) z^{-5}}{z^{2} W_{4}(z)} & 0 \le R \le z \\ \frac{\psi_{4}(z) R^{-5}}{z^{2} W_{4}(z)} & 0 \le z \le R \end{cases}$$
(2.67)

où W<sub>4</sub>(z) est le Wronskien des solutions r<sup>-5</sup> et  $\psi_4$ :

$$W_4(z) = \begin{vmatrix} \psi_4 & z^{-5} \\ \psi'_4 & -5z^{-6} \end{vmatrix} = -z^{-10} \frac{d}{dz} (z^5 \psi_4)$$
(2.68)

Du moment que r<sup>-5</sup> n'est pas solution de  $L_4\psi_4 = 0$  pour r < R<sub>0</sub>, cette équation n'est valide que pour R ≥ R<sub>0</sub>. Nous nous intéressons dans notre cas à la solution V<sub>14</sub> à R = R<sub>0</sub>. Si nous remplaçons dans (2.66) R par R<sub>0</sub>, z<sup>2</sup>W<sub>4</sub>(z) peut être remplacé par R<sub>0</sub><sup>2</sup>W<sub>4</sub>(R<sub>0</sub>), ce qui peut être vérifié en remplaçant l'équation (2.66) dans l'équation (2.51). Sachant aussi que  $F_4(r) = 0$  pour r > R<sub>0</sub>, l'expression de V<sub>14</sub>(R<sub>0</sub>) se simplifie en :

$$V_{14}(R_0) = -R_0^{-5} \left[ r^{-8} \frac{d}{dr} (r^5 \psi_4) \right]^{-1} \bigg|_{r=R_0} \int_0^{R_0} \psi_4(z) F_4(z) dz$$
(2.69)

En remplaçant et  $F_4(z)$  par leurs expressions respectives, on obtient :

$$V_{14}(R_{0}) = -R_{0}^{3} \left[ r^{5} \frac{d\psi_{4}}{dr} + 5r^{4}\psi_{4} \right]^{-1} \bigg|_{r=R_{0}} \times \int_{0}^{R_{0}} \left\{ \frac{4\pi r^{6}\psi_{4}(r)}{M_{r}} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \rho_{0} B_{4}(\Omega) \right] + \frac{8\pi r^{5}\psi_{4}(r)}{M_{r}} \rho_{0} B_{4}(\Omega) - \frac{4\pi r^{5}\psi_{4}(r)\rho_{0}}{M_{r}} \int_{-1}^{+1} \frac{9}{16} \left( u^{2} - 1 \right) (35u^{4} - 30u^{2} + 3)\Omega^{2}(r, u) du \right\} dr$$

$$(2.70)$$

En utilisant les variables adimensionnelles (2.39), l'équation (2.70) devient :

$$V_{14}(1) = -R_0^2 \left[ x^5 \frac{d\psi_4(x)}{dx} + 5x^4 \psi_4(x) \right]^{-1} \Big|_{x=1} \times \int_0^1 \left\{ \begin{array}{l} U(x)K(x) x^2 B_4(\Omega) + \\ U(x)x^3 \frac{\partial B_4(\Omega)}{\partial x} + 2U(x) x^2 B_4(\Omega) - \\ U(x)x^2 \int_{-1}^{+1} \frac{9}{16} \left( u^2 - 1 \right) (35u^4 - 30u^2 + 3) \Omega^2(x, u) \, du \right\} \psi_4(x) \, dx$$

$$(2.71)$$

En remplaçant  $B_4(\Omega)$  son expression, on obtient :

$$V_{14}(1) = -R_0^2 \left[ x^5 \frac{d\psi_4(x)}{dx} + 5x^4 \psi_4(x) \right]^{-1} \Big|_{x=1} \frac{9}{16} \int_0^1 \left\{ \begin{array}{l} U(x)K(x) x^2 \int_{-1}^1 (-7u^6 + 10u^4 - 3u^2 + 4u)\Omega^2(x, u) \, du \\ U(x)x^3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{-1}^1 (-7u^6 + 10u^4 - 3u^2 + 4u)\Omega^2(x, u) \, du \right) \\ + 2U(x)x^2 \int_{-1}^1 (-7u^6 + 10u^4 - 3u^2 + 4u)\Omega^2(x, u) \, du \\ - U(x)x^2 \int_{-1}^1 (u^2 - 1)(35u^4 - 30u^2 + 3)\Omega^2(x, u) \, du \end{array} \right\} \psi_4(x) \, dx$$

$$(2.72)$$

Comme dans (2.53) l'expression de  $J_4$  est :

$$J_4 = \frac{R_0}{G M_0} V_{14}(1)$$
 (2.73)

#### 2.3.5 Calcul de l'aplatissement

Nous allons voir dans ce qui suit comment interviennent les moments gravitationnels  $J_2$  et  $J_4$  dans l'expression de l'aplatissement solaire afin justement de calculer ce dernier. L'aplatissement solaire est défini par l'expression suivante (Dicke 1970) :

$$\varepsilon = \frac{R_e - R_p}{R_0} \tag{2.74}$$

où  $R_e$  et  $R_p$  sont respectivement le rayon équatorial et polaire du soleil et  $R_0$  son rayon moyen. L'aplatissement solaire dans le cas d'une rotation uniforme est donné par la relation suivante (Dicke 1970) :

$$\varepsilon = \varepsilon_{q} + \varepsilon_{s} = \varepsilon_{q} + \frac{1}{2} \frac{\Omega^{2} R_{0}^{3}}{GM_{0}}$$
(2.75)

où G est la constante gravitationnelle,  $M_0$  la masse du soleil, et  $\Omega$  la vitesse angulaire uniforme. Donc l'aplatissement solaire résulte de la somme de deux termes, le premier,  $\varepsilon_q$ , qui s'écrit en fonction des moments gravitationnels, est une mesure de la distorsion du potentiel gravitationnel produit par la rotation interne du soleil et le second,  $\varepsilon_s$ , mesure l'aplatissement produit par la rotation de la surface du soleil. Cette relation est donnée sous certaines approximations qui sont :  $R_e \approx R_0$  et  $R_e^2$ .  $R_p \approx R_0^3$ .

L'expression (2.75) reste valable dans le cas d'une loi de rotation cylindrique et devient approximative dans le cas d'une rotation différentielle qui ne présente pas une symétrie cylindrique. Toutefois, dans ces cas là,  $\Omega$  doit être remplacée par une vitesse de rotation effective  $\Omega_s$  de sorte à produire un correct  $\varepsilon_s$  (Paterno et al. (1996)).  $\Omega_s$  peut être déterminée à partir de la connaissance du comportement de  $\Omega$  comme une fonction du rayon r et de la colatitude $\theta$  et ceci dans les couches surfaciques, chose qui n'est pas évidente vu que l'héliosismologie ne fournit pas des résultats précis sur la rotation des couches extrêmement proche de la surface. La détermination de  $\Omega_s$  est particulièrement importante surtout quand l'aplatissement dû à la rotation de surface est dominant par rapport à celui causé par les moments gravitationnels J<sub>l</sub>, comme dans notre cas.

En 1970, Dicke a considéré une vitesse de rotation différentielle décrivant une loi cylindrique qui s'ajuste approximativement à la rotation de la surface du soleil, et en déduit un  $\Omega_s \approx 2,53 \mu$  rad/s, correspondant à la vitesse angulaire de surface à  $\theta = 45^{\circ}$ .

Paterno et al. (1996), ont pu déterminer  $\Omega_s$  expérimentalement à partir des données de l'instrument SDS (Solar Disk Sextant) (section V.3). Ils sont parvenus à distinguer l'effet sur l'aplatissement induit par la rotation de surface et celui induit par la rotation interne. Ils ont constaté que  $\varepsilon_s$  devrait se trouver entre les valeurs ( $\approx 8,47.10^{-6}$ ) et ( $\approx 8,8.10^{-6}$ ), correspondant respectivement à  $\Omega_s \approx 2,58 \mu$  rad/s et  $\Omega_s \approx 2,63 \mu$  rad/s. D'autre part, dans le cas d'une rotation lente, la surface du soleil ne s'écarte que très légèrement de la sphère, l'expression de cette surface déformée peut être donnée par la relation (2.76) :

$$\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R}_0 \left( 1 + \mathbf{r}_2 \mathbf{P}_2(\theta) + \mathbf{r}_4 \mathbf{P}_4(\theta) \right)$$
(2.76)

où  $R_0$  est le rayon du soleil considéré sphérique et  $r_1$  et  $r_2$  représentent la distorsion de la surface, produite par la rotation non uniforme.

La comparaison de cette expression avec l'expression de la loi de rotation différentielle en surface donnée par Ulrich et al. (1988) (expression (2.77) avec  $o_2 = -0,49$  et  $o_2 = -0,09$  et  $\Omega_0 = 2,62\mu$  rad/s), leur a permis de considérer que  $\Omega_s = \Omega_0 = 2,62\mu$  rad/s.

$$\Omega(\theta) = \Omega_0 (1 + o_2 P_2(\theta) + o_4 P_4(\theta))$$
(2.77)

Dans notre cas, et afin de déterminer  $\Omega_s$ , il faudra faire la même comparaison et ceci en écrivant sous la même forme que (2.77) les lois de rotation différentielles en surface à partir des modèles de rotation utilisés dans notre travail.

 $\varepsilon_q$  s'écrit en fonction des moments gravitationnels  $J_l$ , donc son expression change en fonction de l'ordre l étudié. Aussi, la valeur de  $\varepsilon_s$  dépendra de la valeur  $\Omega_s$ , puisque cette dernière change selon le modèle de rotation considéré.

Au premier ordre (l=2): Dans ce cas, seul le moment quadrupolaire J<sub>2</sub> intervient dans l'expression de  $\varepsilon_q$  par le biais de la relation suivante :

$$\varepsilon_{q} = \frac{3}{2} J_{2} \tag{2.78}$$

La relation (2.75) qui donne l'aplatissement devient alors :

$$\varepsilon = \frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}\frac{\Omega_s^2 R_0^3}{GM_0}$$
(2.79)

Notons que  $\Omega_s$  prend des valeurs différentes selon le modèle de rotation considéré.

Au second ordre (l=4) : Dans ce cas là, c'est le moment quadrupolaire J<sub>2</sub> et le moment octopolaire J<sub>4</sub> qui interviennent dans l'expression de  $\varepsilon_q$  et ceci par le biais de la relation suivante :

$$\varepsilon_{q} = \frac{3}{2}J_{2} + \frac{5}{8}J_{4}$$
(2.80)

La relation (2.75) qui donne l'aplatissement devient alors :

$$\varepsilon = \frac{3}{2}J_2 + \frac{5}{8}J_4 + \frac{1}{2}\frac{\Omega_s^2 R_0^3}{GM_0}$$
(2.81)

## 2.4 Modèles de rotation

Les moments gravitationnels ont été déterminés pour deux modèles de rotation. Le premier est celui de A. Kosovichev (1996). Il est déterminé à partir d'une loi analytique qui s'ajuste le mieux possible aux données héliosismiques qui sont obtenues au Big Bear Solar Observatory (BBSO-USA). Il a l'avantage de fournir une loi analytique qui décrit correctement la rotation différentielle du soleil dans la zone convective, mais sa nature analytique implique de négliger un certain nombre de variations radiales et latitudinales de la rotation. En particulier, comme la vitesse de rotation du cœur est encore aujourd'hui très mal connue, elle est supposée être dans ce modèle, égale à celle de la vitesse de rotation uniforme de la zone radiative. Ce modèle prend en compte la présence d'un gradient radial de rotation négatif près de la surface basé sur l'hypothèse de la conservation du moment angulaire dans les couches de super granulation (Foukal et Jokipii (1975)).

Le second modèle utilisé est celui de T. Corbard et al. (2002). Ce modèle met en évidence un gradient radial de la vitesse angulaire près de la surface basé sur des données observationnelles et non sur l'hypothèse de Foukal et Jokipii (1975), et ceci en utilisant une petite mais significative dépendance radiale des modes f de degrés entre l=117 et l=300(Corbard et Thompson 2001). Ces modes proviennent des données heliosismiques observées par MDI (Michelson Doppler Imager) à bord du satellite SOHO (SOlar and Heliospheric Observatory), et ceci entre mai 1996 et avril 2001 (Schou, 1999).

Notons que la différence fondamentale entre ces modèles est que dans le modèle de Kosovichev le gradient radial est négatif en fonction de la latitude, tandis que ce dernier est négatif en basse latitude et positif en hautes latitudes pour le modèle de Corbard. Le modèle de Corbard est meilleur et plus fiable du fait qu'il correspond plus aux données observationnelles.

#### 2.4.1 Modèle de Kosovichev (1996)

Ce modèle décrit la vitesse de rotation  $\Omega(r, \theta)$  en la développant sur la base des polynômes de Legendre tel que :

$$\frac{\Omega(\mathbf{r},\theta)}{2\pi} = \sum_{k=0,1,2} \alpha_k A_{2k+1}(r) \frac{P_{2k+1}^1(\cos\theta)}{\sin\theta}$$
(2.82)  
$$\alpha_k = (-1)^{k+1} \frac{k! 2^k}{(2k+1)!!}$$

(2k+1)!!

avec :

et: 
$$P_{2k+1}^{1} = -\sin\theta \frac{dP_{2k+1}(\cos\theta)}{d\cos\theta}$$

Les fonctions  $A_k(r)$  sont des fonctions qui décrivent la dépendance radiale de la rotation, tandis que les polynômes de Legendre décrivent la dépendance latitudinale de la rotation,  $\theta$  étant la colatitude du soleil. Développée jusqu'à l'ordre k=2, cette expression permet de décrire la dépendance radiale et latitudinale de la rotation (fig.2.2) avec une précision suffisante (avec x =  $\frac{r}{R_0}$  et u = cos $\theta$ ):

$$\frac{\Omega(\mathbf{x},\mathbf{u})}{2\pi} = A_1(\mathbf{x}) + A_3(\mathbf{x})[1 - 5\,\mathbf{u}^2] + A_5(\mathbf{x})[1 - 14\,\mathbf{u}^2 + 21\,\mathbf{u}^4]$$
(2.83)

Les fonctions  $A_k(r)$  sont données en nHz par :

$$A_{1}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 435 - 882.53(\mathbf{x} - 1) & \text{pour} & 0,983 \le \mathbf{x} \le 1 \\ 435 + 51.85(\mathbf{x} - 0,71) & \text{pour} & 0,71 \le \mathbf{x} \le 0,983 \\ 435 & \text{pour} & \mathbf{x} \le 0,71 \end{cases}$$
(2.84)

$$A_3(\mathbf{x}) = 22\phi(\mathbf{x})$$
 (2.85)

$$A_5(\mathbf{x}) = -3.5\phi(\mathbf{x}) \tag{2.86}$$

$$\phi(\mathbf{x}) = 0.5 \left( 1 + erf\left[ 2\frac{(\mathbf{x} - 0.69)}{0.1} \right] \right)$$
(2.87)



**Figure. 2.2 :** Modèle de rotation proposé par Kosovichev (1996) : On remarque dans ce modèle que la rotation est pratiquement uniforme en deçà de  $0.6R_0$ .

#### 2.4.2 Modèle de Corbard (2002)

Ce modèle offre à son tour deux modèle analytique de rotation selon la profondeur du gradient radial de la vitesse angulaire (fig. 2.4, 2 et 3).

La (fig. 2.3) montre que le gradient extérieur s'avère négatif avec une valeur d'environ 400nHz/R jusqu'à une latitude de  $30^{\circ}$ , il diminue à de petites valeurs au dessus de  $30^{\circ}$  et approche de zéro à une latitude d'environ  $50^{\circ}$  (fig. 2.3, ligne discontinue). A plus hautes latitudes, le gradient peut changer de signe. Si tel est le cas, ce renversement de signe a lieu dans une couche mince se prolongeant seulement 5Mm sous la surface visible comme démontré par les modes les plus superficiels avec des degrés 1 > 250, et peut atteindre une valeur d'environ 800nHz/R à 75 degrés de latitude (fig. 2.3, ligne continue). Ces deux modèles présentent deux lois analytiques simples qui mettent en évidence à la fois la dépendance radiale et latitudinale de la rotation dans la zone convective et la tachocline et un gradient radial près de la surface.

Ce modèle peut être décrit (du noyau à la surface) comme tel : La rotation est constante dans l'intérieur radiatif et a pour valeur [ $\Omega_0$ ], puis il y a la tachocline qui est au même endroit [ $r_{tac}$ ] et qui a la même épaisseur [ $\omega_{tac}$ ] quelle que soit la latitude et telle qu'à la fin de la tachocline [ $r_{cz}$ ] la rotation est donnée par  $\omega_{cz}$ , [ $a_1$ ] et [ $a_2$ ] comme suit ( $u = \cos\theta$ ,  $\theta$  étant la colatitude du soleil):

$$\Omega(\mathbf{r}_{cz},\theta) = \Omega_{cz} + a_2 u^2 + a_4 u^4$$
(2.88)

avec :

$$\Omega_{cz} = \Omega_0 - \frac{a_2}{5} - \frac{a_4}{35}$$
(2.89)

Les coefficients de rotation différentielle  $a_1$  et  $a_2$  sont choisis de telle sorte que leurs valeurs à la surface  $r = R_0$  soient les mêmes que ceux à  $r = r_{cz}$  (la fin de la tachocline), par contre à la surface, la valeur de la vitesse de rotation équatoriale vaut  $[\Omega_{eq}]$  qui est différente  $\Omega_{cz}$ .

Comme nous l'avons mentionné, il existe un gradient sous la surface se prolongeant jusqu'à un rayon  $[r_s]$ . Cette profondeur est indépendante de la latitude mais le gradient, lui, dépend de la latitude à travers les coefficients  $[\beta_0]$ ,  $[\beta_3]$ ,  $[\beta_6]$  suivant la formule qui suit :

$$\beta(u) = \beta_0 + \beta_3 u^3 + \beta_6 u^6$$
(2.90)

Un petit gradient radial est ajouté dans la zone de convection dans le but de relier la rotation à  $r_s$  et  $r_{cz}$ . Par conséquent  $a_1$  et  $a_2$  décrivent la rotation différentielle de sorte que cette dernière varie légèrement entre  $r_{cz}$  et  $r_s$  à cause des gradients introduits.

La transition entre les différents gradients est modélisée grâce à des fonctions erreurs centrées successivement à  $r_{tac}$ ,  $r_{cz}$  et  $r_s$  avec des largeurs respectives  $w_{tac}$ ,  $[w_{cz}]$  et  $[w_s]$ :

$$\phi_{x}(\mathbf{r}) = 0.5 \left( 1 + erf\left[ 2 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{x})}{\omega_{x}} \right] \right)$$
(2.91)

Ce modèle inclut 13 paramètres (paramètres entre crochets) et peut être écrit comme suit :

$$\Omega(\mathbf{r},\mathbf{u}) = A_1(\mathbf{r},\mathbf{u}) + \phi_{\text{tac}}(\mathbf{r}) \Big( \Omega_{cz} - \Omega_0 + a_2 \, \mathbf{u}^2 + a_4 \, \mathbf{u}^4 \Big)$$
(2.92)

avec:

$$\begin{cases} A_{1}(\mathbf{r},\mathbf{u}) = \Omega_{0} + \phi_{cz} \left\{ \alpha(\mathbf{u})(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{cz}) \right\} + \phi_{s} \left\{ \Omega_{eq} - \Omega_{cz} - \beta(\mathbf{u})(\mathbf{r} - \mathbf{R}) - \alpha(\mathbf{u})(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{cz}) \right\} \\ \alpha(\mathbf{u}) = \frac{\left\{ \Omega_{eq} - \Omega_{cz} + \beta(\mathbf{u})(\mathbf{R} - \mathbf{r}_{s}) \right\}}{\left(\mathbf{r}_{s} - \mathbf{r}_{cz}\right)} \end{cases}$$

$$(2.93)$$

Cette forme de la vitesse de rotation peut être liée à la formulation proposée par Kosovichev. En effet, dans les deux modèles proposés dans ce qui suit, nous utiliserons les mêmes paramètres que ceux utilisés par Kosovichev sauf pour :

- (i) la largeur de la tachocline, qui est considérée plus grande suite à de plus récentes déterminations (Corbard et al., 2001) ( $\omega_{tac}=0.05R_0$ ).
- (ii) la position maximale proche de la surface, qui est prise arbitrairement à la base de la couche à laquelle les modes f sont sensibles ( $r_s = 0.97R_0$ ).
- (iii) le gradient radial de surface, qui obtenu par un ajustement selon l'équation (2.90) des données des deux cas présentés précédemment (fig. 2.3) (en  $nHz/R_0$ ):
  - Modèle (a) :  $\beta_0=437$ ,  $\beta_3=-214$ ,  $\beta_6=-503$  (fig. 2.3 ligne discontinue) Modèle (b) :  $\beta_0=437$ ,  $\beta_3=0$ ,  $\beta_6=-1445$  (fig. 2.3 ligne continue)
- (iv) les largeurs de transitions à  $r_{cz}$  et  $r_s$  qui ne sont pas prise égale à zéro afin d'éviter les discontinuités dans la dérivée ( $\omega_{cz} = \omega_s = 0.05R_0$ ).

Les paramètres qui sont pris identiques à ceux de Kosovichev sont :

$$\Omega_0 = 435 \text{ nHz}, \ \Omega_{eq}(R_0) = 452,5 \text{ nHz}, \ r_{tac} = 0,69 \text{ R}_0, \ r_{cz} = 0,71 \text{ R}_0, \ a_2 = -61 \text{ nHz}, \ a_4 = -73,5 \text{ nHz}$$

Notons que nous pouvons à partir du modèle proposé par Corbard obtenir un modèle exactement similaire à celui de Kosovichev (Dikpati el al. 2002) et ceci en considérant une largeur plus grande de la tachocline  $\omega_{tac}=0,1R_0$  centrée en  $0,69R_0$  et des largeurs nulles des autres zones de transitions  $\omega_{cz}=\omega_s=0$  et avec  $r_s = 0,983R_0$  nous obtenons ainsi les paramètres qui ne sont pas communs entre ces modèles :

model	$w_{tac}/R$	$w_{cz}/R$	w <sub>s</sub> /R	r <sub>s</sub> /R	$B_0$	$B_3$	$B_6$
Kosovichev	0,1	0	0	0,983	891,5	0	0
Corbard (a)	0,05	0,05	0,05	0,97	437	-214	-503
Corbard (b)	0,05	0,05	0,05	0,97	437	0	-1445



**Figure. 2.3 :** Gradient radial moyen pour une vitesse de rotation angulaire fonction de la latitude. **Ligne Continue** : pour des profondeurs d'environ 15Mm (modes 160<1<250). **Ligne discontinue** : pour des profondeurs d'environ 5Mm (modes 250<1<300).



**Figure. 2.4 :** Comparaison des modèles de rotation : (1) modèle de Kosovichev, (2) modèle de Corbard (a) obtenu à partir de la figure 2.3 ligne continue et (3) modèle de Corbard (b) obtenu à partir de la figure 2.3 ligne discontinue. De bas en haut la latitude est décroissante (colatitude croissante = du pôle à l'équateur).

## 2.5 Modèle solaire

Les modèles solaires sont construits à partir des équations de base de l'évolution stellaire. Ils supposent que le soleil possède une symétrie sphérique en l'absence de champs magnétiques et de rotation. Ces équations comportent : la conservation de la masse, l'équilibre hydrostatique, la conservation de l'énergie (celle produite par les réactions thermonucléaires et celle emportée par les neutrinos), les phénomènes de transport convectif et radiatif de l'énergie, la variation de la composition chimique due aux réactions nucléaires.

D'autre part ces équations de base nécessitent : (i) la connaissance des taux de réactions nucléaires afin de calculer l'énergie produite par les réactions nucléaires, (ii) l'utilisation d'une équation d'état pour déterminer la densité $\rho$ , la chaleur spécifique à pression constante C<sub>P</sub>, la

quantité 
$$\delta = -\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_{\rm p}$$
 et le gradient adiabatique  $\nabla_{\rm ad} = \left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{\rm ad}$ , (iii) la connaissance de

l'opacité de la zone radiative pour calculer le gradient radiatif  $\nabla_{rad} = \left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{rad}$ , (iv) le

traitement de la convection pour obtenir le flux convectif et le gradient convectif

$$\nabla_{\rm conv} = \left(\frac{d\ln T}{d\ln p}\right)_{\rm conv}.$$

Différents processus physiques, supplémentaires à ceux qui ont été présentés, peuvent être pris en compte dans la modélisation du soleil. Ces processus concernent plusieurs domaines. Par exemple, les modèles solaires peuvent essayer de prendre en compte l'existence de mélanges localisés, soit dans le cœur, permettant de reproduire le flux de neutrinos observés (Brun et al., 1998) ou à la base de la zone convective (Brun et al., 1999). Des processus comme l'existence de fluctuations de température à la base de la zone convective ou à la perte de masse (Morel et al., 1997) sur l'ensemble du Soleil peuvent aussi être considérés.

Donc les différences qui existent entre les modèles solaires sont associées à des considérations particulières qui concernent à la fois la physique et la commodité du modèle utilisé. La commodité est liée à la finesse du découpage du soleil sous forme de strates. Plus

la stratification est fine, plus on a accès à des détails fins, c'est-à-dire obtenus avec un nombre minimum d'extrapolation, mais d'un autre côté les calculs seront plus lourds. Dans un contexte plus physique qui nous intéresse dans ce travail, si l'on veut calculer les moments gravitationnels à la surface d'une façon correcte, il est nécessaire d'avoir un modèle bien calibré en surface. En effet certains modèles sont calibrés de telle façon qu'ils sont raccordables à des modèles d'atmosphère, ce qui est le cas du modèle solaire de P.Morel et al. (1997) qui va être utilisé dans ce travail. Ce modèle calculé avec le code d'évolution stellaire CESAM (Berthomieu et al., 1993) tient compte aussi de la perte de masse, de la diffusion microscopique de l'hélium et de celle des éléments lourds, son échantillonnage est de 2100 points dont 530 points à partir de 0.99  $R_0$ .

Les quantités U(x) =  $\frac{4\pi\rho_0 r^3}{M_r}$ , K(x) =  $\frac{d\ln\rho_0}{d\ln r}$  présentent dans les équations (2.40), (2.52),

(2.62) et (2.72) obtenues à partir de ce modèle solaire ont des variations en fonction du rayon solaire données par la figure 2.5.



**Figure. 2.5 :** Variations en fonction du rayon solaire des quantités U(x) et K(x) obtenues à partir du modèle solaire utilisé.

## 2.6 Résolution du problème des deux valeurs aux limites

#### 2.6.1 Résolution de l'équation différentielle résultante de la Méthode Directe

La méthode qu'on va utiliser peut être applicable à toute équation aux différentielles totales dans laquelle les coefficients ne sont fonction que de la variable indépendante. Considérant, par exemple, l'équation (2.94), qui est une généralisation des équations (2.40) et (2.52), ayant les deux conditions aux limites (2.95), y = A pour x = a, y = B pour x = b, il convient de définir deux équations auxiliaires du second ordre avec des variables indépendantes u(x) et v(x) (2.96), similaires à (2.94), dont les conditions aux initiales sont données par (2.97) :

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = F(x)$$
(2.94)

$$\begin{cases} y = A \quad pour \quad \mathbf{x} = a \\ y = B \quad pour \quad \mathbf{x} = b \end{cases}$$
(2.95)

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} + P(x)\frac{du}{dx} + Q(x)u = F(x) \\ \frac{d^2v}{dx^2} + P(x)\frac{dv}{dx} + Q(x)v = F(x) \end{cases}$$
(2.96)

$$\begin{cases} u = A \quad et \quad \frac{du}{dx} = C \\ v = A \quad et \quad \frac{dv}{dx} = D \end{cases} \quad \text{pour} \quad x = a \tag{2.97}$$

C et D doivent être choisies arbitrairement, tout en étant inégales entre elles, ceci pour ne pas aboutir à une solution triviale telle par exemple que si F(x) = 0 et A = 0, C ou D peuvent aussi être égales à zéro.

Les équations (2.96) soumises aux conditions initiales (2.97) sont alors résolues séparément, en utilisant une méthode numérique pour la résolution d'un problème aux valeurs initiales. La méthode numérique utilisée dans ce travail est la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Des fonctions continues U(x) et K(x) (équation (2.40) et (2.52)) sont utilisées lors de la résolution des problèmes aux valeurs initiales. Elles sont obtenues par interpolation polynomiale des données provenant du modèle solaire utilisé, et ceci en utilisant l'algorithme de Neville.

Les fonctions u(x) et v(x) sont obtenues dans l'intervalle de variation x compris entre a et b. Ces solutions fournissent donc les valeurs de u(b) et v(b) pour x = b. L'application du théorème de superposition permet alors d'exprimer la solution y(x) comme une combinaison linéaire de u(x) et de v(x), et ceci, à partir de l'équation (2.98). Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont déterminés en substituant dans l'équation (2.98) tout d'abord les valeurs de y, u et v, pour x = a, puis les valeurs de y, u et v pour x = b. Il en résulte deux équations simultanées (2.99) desquelles on tire  $\alpha$  et  $\beta$  par les formules (2.100) :

$$y(\mathbf{x}) = \alpha \, u(\mathbf{x}) + \beta \, v(\mathbf{x}) \tag{2.98}$$

$$\begin{cases} A = \alpha A + \beta A \\ B = \alpha u(b) + \beta v(b) \end{cases}$$
(2.99)

$$\alpha = \frac{B - v(b)}{u(b) - v(b)}, \qquad \beta = \frac{B - u(b)}{v(b) - u(b)}$$
(2.100)

#### 2.6.2 Résolution de l'équation intégrale résultante de la Méthode de Green

La résolution des équations intégrales (2.62) et (2.72) nécessite la construction de deux fonctions  $\psi_2$  et  $\psi_4$  qu'on notera d'une manière générale  $\psi$ . Considérons l'équation (2.101) qui est une généralisation des équations (2.54) et (2.64) :

$$L(\mathbf{x}) \ y \equiv \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\mathbf{x}^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\right) + Q(\mathbf{x})\right] \ y = F(\mathbf{x})$$
(2.101)

La fonction  $\psi$  est construite de telle sorte qu'elle soit solution de l'équation homogène de l'équation (2.101) (i.e : F(x)=0) et qu'elle soit régulière à x = a, donc :

$$L(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) \equiv \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\left(\mathbf{x}^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\right) + Q(\mathbf{x})\right]\psi(\mathbf{x}) = 0$$
(2.102)

avec comme conditions initiales :

$$\psi = A \quad et \quad \frac{d\psi}{dx} = B \qquad \text{pour} \qquad x = a$$
 (2.103)

L'équation (2.102) associée aux conditions initiales (2.103) peut être résolue en utilisant une méthode numérique pour la résolution d'un problème aux valeurs initiales. Comme précédemment, la méthode numérique utilisée est la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Une fonction continue  $\psi(x)$  peut être ainsi obtenue par interpolation polynomiale des valeurs numériques de  $\psi$  obtenues après la résolution numérique de l'équation différentielle (2.102). Cette interpolation est obtenue en utilisant l'algorithme d'interpolation de Neville.

Les fonctions continues  $\psi_2(x)$  et  $\psi_4(x)$ , ainsi obtenues, associées aux fonctions U(x) et K(x) servent ensuite à la résolution des équations intégrales (2.62) et (2.72) et ceci en utilisant la méthode de Romberg pour le résolution numérique des intégrales.

## 2.7 Conclusion du chapitre 2

Dans ce chapitre nous avons vu comment utiliser, dans le cas d'une rotation ou l'écart à la symétrie sphérique est faible, les techniques de perturbation pour traiter les effets de la rotation comme de petites déformations superposées à un modèle sphérique connu. Nous avons étudié le cas du soleil en rotation lente ne suivant pas une loi cylindrique. Appliquer la technique de perturbation a consisté à écrire les termes intervenant dans l'équation de l'équilibre hydrostatique du soleil et dans l'équation de poisson de son potentiel gravitationnel, sous la forme de quantités non-perturbées (symétrie sphérique = pas de rotation) plus des quantités perturbées décrivant les petits écarts à la sphéricité (de symétrie non-sphérique = existence de la rotation) développés en séries des polynômes de Legendre, chaque ordre du développement correspond à un ordre des perturbations. En combinant les deux équations résultantes, nous avons aboutit à une équation différentielle du second ordre à coefficients non-constants et avec second membre non-constant. Cette équation gouverne la perturbation du potentiel gravitationnel du centre à la surface du soleil. Nous avons restreint notre travail au premier et au deuxième ordre des perturbations en utilisant deux méthodes différentes qui ont nécessité à leurs tour l'utilisation de deux méthodes de résolution numérique fondamentalement différentes (méthode directe: résolution numérique d'une équation différentielle et méthode Green: résolution numérique d'une intégrale). En outre cette résolution a nécessité l'utilisation d'un modèle de densité et de masse (modèle solaire) et trois modèles de rotation. La valeur en surface de la perturbation du potentiel gravitationnel permet de calculer le moment gravitationnel correspondant à l'ordre des perturbations étudié. Nous avons vu aussi comment déterminer l'expression de l'aplatissement en fonction des moments gravitationnels.

# **Chapitre 3**

# Résultats, discussions et applications

## **3.1 Introduction**

Les valeurs des moments gravitationnels, à travers des déterminations observationnelles ou théoriques, sont très disparates. A titre d'exemple, depuis 1960, les valeurs du moment quadrupolaire variaient entre  $10^{-7}$  et  $10^{-5}$ . Par contre depuis 1996 son ordre de grandeur tend à se stabiliser vers  $10^{-7}$ . Dans la suite de ce chapitre, nous allons présenter et discuter les résultats des deux méthodes théoriques développées dans le chapitre précédent pour calculer le moment quadrupolaire J<sub>2</sub> et le moment octopolaire J<sub>4</sub>. Les résultats de chaque méthode seront donnés et comparés pour les deux modèles récents de rotation utilisés (modèle de Kosovichev (1996) et modèle de Corbard (2002)), par contre un seul modèle solaire est utilisé (modèle de P.Morel et al 1997). Afin de voir l'effet de la rotation différentielle sur les valeurs numériques de J<sub>2</sub> et J<sub>4</sub>, ces résultats ont été aussi comparés avec ceux trouvés pour une vitesse angulaire uniforme de l'ordre de celle de la zone radiative, sachant que celle-ci est décrite par une rotation pratiquement uniforme. La valeur la plus probable de cette vitesse est de l'ordre de 2.7 $\mu$  rad.s<sup>-1</sup> (Paterno et al, 1996); (Corbard, 1998).

Le moment gravitationnel d'ordre l,  $J_l$ , mesure l'amplitude des perturbations subies par le potentiel gravitationnel d'une sphère parfaite due à sa rotation, c'est-à-dire l'amplitude d'un écart à la sphère de type  $P_l$ . A titre d'exemple, l'hélioïde de type  $P_2$  correspondant à l'harmonique sphérique  $Y_{2,0}$  est représenté par une sphère aplatie aux pôles, donc le moment quadrupolaire  $J_2$  nous permettra d'arriver à notre objectif qui est le calcul de l'aplatissement du soleil. Nous verrons aussi à quel point les hélioïdes du type  $P_2$  et  $P_4$  peuvent contribuer à la résolution du problème non encore élucidé de la variation latitudinale du diamètre solaire. Enfin, nous verrons aussi à titre d'application l'influence des moments gravitationnels solaires sur les orbites planétaires et en particulier la contribution du moment quadrupolaire  $J_2$  à l'avance du périhélie de Mercure.

## 3.2 Résultats et discussions

## 3.2.1 Premier ordre (*l*=2)

Les profils qui décrivent la perturbation du potentiel gravitationnel au premier ordre (*l*=2) notée  $y_{12}$  (fig. 3.1 (a) et (b)) pour un même modèle solaire, obtenus à partir de la méthode directe, montrent un comportement globalement similaire et ceci pour les différents modèles de rotation et pour une vitesse de rotation uniforme choisie égale à celle de la zone radiative. Ce comportement peut être décrit par une augmentation du centre jusqu'à une valeur maximale autour de 0,48R<sub>0</sub>, puis une diminution progressive jusqu'à la surface. On remarque une superposition parfaite de toutes les perturbations  $y_{12}$  du centre jusqu'à 0,6R<sub>0</sub>, ceci provient du fait que dans cette zone tous les modèles sont caractérisés par une même vitesse de rotation uniforme (elle est choisie égale à celle de la zone radiative). A partir de 0,6R<sub>0</sub>, la perturbation  $y_{12}$  devient dépendante de la nature différentielle de la rotation. Pour le modèle de Kosovichev, ceci se traduit par une séparation des autres perturbations  $y_{12}$  à partir de 0,6R<sub>0</sub>, tandis que pour le modèle de Corbard (a) et (b) cette séparation prend effet à partir de 0,65R<sub>0</sub> (fig. 3.1 (b)).



**Figure 3.1 (a) :** Profils de la perturbation du potentiel gravitationnel  $y_{12}$  le long du rayon solaire pour les différents modèles de rotation utilisés. Profils obtenus à partir de la méthode directe.



**Figure 3.1 (b) :** Zoom sur la partie de  $0,6R_0$  à  $R_0$  de la figure 3.1 (a).

Dans ces deux modèles, ces séparations marquent l'entrée dans une zone de transition centrée autour de  $0,69R_0$  appelée "tachocline" et qui s'étend jusqu'au début de la zone convective à environ  $0,71R_0$  (fig. 3.1 (b)). La tachocline, détectée par l'héliosismologie (Brown et al. 1989) et modélisée par Spiegel et zahn (1992), est une zone de fort cisaillement qui fait la transition entre la zone radiative qui est caractérisée par une rotation pratiquement uniforme, et la zone convective où la rotation est différentielle. Dans cette zone, la différence remarquée entre les perturbations  $y_{12}$  liées à ces deux modèles vient du fait de la considération de deux largeurs différentes de la tachocline.

La comparaison du profil de y<sub>12</sub> correspondant à la rotation uniforme avec ceux correspondant aux différents modèles de rotation différentielle montre que la valeur de la perturbation  $y_{12}$ dans la zone convective est légèrement augmentée par la nature différentielle de la rotation qui y règne (fig. 3.1 (c)). Par contre près de la surface à partir d'une valeur de  $0.93R_0$  ce comportement s'inverse jusqu'à la surface et la perturbation  $y_{12}$  correspondant à la rotation uniforme devient légèrement plus grande que les perturbations y<sub>12</sub> correspondants aux rotations différentielles (fig. 3.1 (d)). D'autre part, la comparaison des profils de  $y_{12}$ correspondant aux différents modèles de rotations différentielles, montre que la perturbation y<sub>12</sub> dans la zone convective est légèrement plus faible dans le cas du modèle de Kosovichev que dans le cas du modèle de Corbard (a) et (b) (fig. 3.1 (c)) et que celle correspondant au modèle de Corbard (a) est légèrement plus petite que dans le modèle de Corbard (b) (fig. 3.1 (c)). Par contre à partir de  $0.93R_0$ , la perturbation  $y_{12}$  correspondant au modèle de Kosovichev devient a son tour légèrement plus grande que celles correspondants au modèles de Corbard (a) et (b) (fig. 3.1 (d)) et aussi la perturbation  $y_{12}$  correspondant au modèle de Corbard (a) devient légèrement plus grande que celle correspondant au modèle de Corbard (b) (fig. 3.1 (d)). Ce renversement de situation à partir de 0,93R<sub>0</sub>, marque l'entrée dans une seconde zone de cisaillement près de la surface centrée autour de 0,97R<sub>0</sub> et qui est caractérisée par la présence d'un fort gradient radial de rotation. Ce comportement des différentes perturbations  $v_{12}$  reste le même jusqu'à la surface. La différence entre les profils des perturbations correspondant aux différents modèles de rotation différentielle provient du fait que dans le modèle de Kosovichev on considère un gradient radial de rotation près de la surface constant et négatif en fonction de la latitude, tandis que pour le modèle de Corbard (a) et (b) il est négatif à basse latitude et devient positif à haute latitude héliographique et que dans le modèle de Corbard (b) ce gradient prend des valeurs positives à haute latitude beaucoup plus grandes que dans le modèle de Corbard (a) (fig. 2.3).

La table (3.1) présente les valeurs en surface de la perturbation du potentiel  $y_{12}$  à partir desquelles sont calculées les valeurs des moments quadrupolaires  $J_2$  obtenues à partir des deux méthodes théoriques utilisées et ceci en fonction d'une vitesse de rotation uniforme ainsi que les différents modèles de rotation différentielle utilisés.

Cette table révèle des valeurs du moment quadrupolaire  $J_2$  très proches et compatibles entre elles, car elles sont du même ordre de grandeur qui est de  $10^{-7}$ . Nous remarquons aussi que la valeur du moment quadrupolaire  $J_2$  est légèrement plus faible dans le cas d'une rotation différentielle que dans le cas d'une rotation uniforme. Cette légère diminution est de l'ordre de 0,5% dans le cas du modèle de Kosovichev et de l'ordre de 0,8% dans le cas du modèle de Corbard (a) et (b). Donc  $J_2$  il n'est que très légèrement sensible à l'inclusion de la rotation différentielle dans la zone convective.



**Figure 3.1 (c) :** Zoom sur une partie de la zone convective des profils du potentiel perturbé  $y_{12}$ .



**Figure 3.1 (d) :** Zoom sur une partie de la zone proche de la surface des profils du potentiel perturbé  $y_{12}$ .

	Méthode directe		Méthode de Green		
Modèle de rotation	$y_{12}(1)(.10^{-2})$	J <sub>2</sub> (.10 <sup>-7</sup> )	y <sub>12</sub> (1) (.10 <sup>-2</sup> )	J <sub>2</sub> (.10 <sup>-7</sup> )	
Rotation uniforme $(\Omega_0 = 435 \text{nHz})$	1,1683	2,2168	1,1683	2,2167	
Modèle de Kosovichev	1,1623	2,2054	1,1622	2,2053	
Modèle de Corbard (a)	1,1601	2,2012	1,1600	2,2011	
Modèle de Corbard (b)	1,1583	2,1977	1,1582	2,1976	

**Table 3.1 :** Valeurs en surface de la perturbation du potentiel au premier ordre (l=2) "y<sub>12</sub>", et valeurs du moment quadrupolaire correspondant, pour une rotation uniforme et les différents modèles de rotation différentielles. Valeurs obtenues par les deux méthodes utilisées "Méthode directe" et "Méthode de Green".

Afin d'essayer d'expliquer les raisons de cette légère différence dans la valeur de J<sub>2</sub> entre les modèles de Corbard (a) et (b) et de voir comment varie cette valeur avec différents gradients radiaux subsurfaciques, nous avons construit trois autres courbes représentant la variation du gradient radial moyen de rotation près de la surface en fonction de la latitude semblables à celles de la figure 2.3 et qui obéissent à la formule (2.89). Les paramètres  $\beta_3$  et  $\beta_6$  de chaque nouvelle courbe construite sont obtenus à partir de la moyenne de ces même paramètres correspondants aux deux courbes qui lui sont voisines ( $\beta_0$  reste lui inchangé pour toutes les courbes). Nous obtenons ainsi trois courbes construites supplémentaires (C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>) que nous représentons sur la figure 3.2 avec les courbes (C<sub>a</sub>, C<sub>b</sub>) obtenues à partir de l'héliosismologie (Corbard et al. 2002) de la figure 2.3. Trois autres modèles de rotation sont ainsi construits pour lesquels les profils de la perturbation du potentiel gravitationnel y<sub>12</sub> ont été déterminés et représentés sur la figure 3.3 (a) avec les deux profils de y<sub>12</sub> déjà obtenus pour les modèles de Corbard (a) et (b).



**Figure 3.2 :**  $C_a$ ,  $C_b$  : Courbes de la variation réelle du gradient radial de rotation en fonction de la latitude obtenues à partir de l'héliosismologie.  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  : Courbes construites de la variation du gradient radial de rotation en fonction de la latitude.



**Figure 3.3 (a) :** Profils du potentiel perturbé  $y_{12}$  le long du rayon solaire pour les modèles de Corbard (a) et (b) et les modèles construits  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ . Profils obtenus à partir de la méthode directe. On remarque pratiquement une parfaite superposition du fait de la faible sensibilité de la perturbation au gradient radial subsurfacique.



**Figure 3.3 (b) :** Zoom sur une partie de la zone convective des profils du potentiel perturbé  $y_{12}$  de la figure 3.3 (a).



**Figure 3.3 (c) :** Zoom sur une partie de la zone proche de la surface des profils du potentiel perturbé  $y_{12}$  de la figure 3.3 (a).

A partir de la figure (3.3 (a)) nous remarquons que ces perturbations  $y_{12}$  sont pratiquement superposées. Toutefois, à partir des figures (3.3 (b) et (c)) nous remarquons quelques légères différences. En effet plus la courbe du gradient radial de rotation présente des valeurs positives importantes à haute latitude plus le profil de la perturbation  $y_{12}$  est grand dans la zone convective et petit près de la surface, mais très légèrement, ce qui engendre des valeurs de J<sub>2</sub> en surface décroissantes. La table 3.2 donne les valeurs du moment quadrupolaire J<sub>2</sub> en fonction de ces différents modèles.

Modèle de rotation	Ca	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>b</sub>
$J_2(.10^{-7})$	2,2012	2,2004	2,1995	2,1986	2,1977

**Table 3.2 :** Valeurs du moment quadrupolaire  $J_2$  en fonction des différents modèles de rotation prenant en compte des gradients radiaux de rotation près de la surface différents.

Donc  $J_2$  est très peu sensible à la présence du gradient radial de rotation près de la surface. D'autre part, la comparaison des valeurs de la table 3.1 du moment quadrupolaire  $J_2$  correspondant aux modèles de rotation différentielle avec celles publiées montre comme dans tous les travaux récents qu'elles sont extérieures à l'intervalle  $1,0\times10^{-7}$ <  $J_2 < 1,5\times10^{-7}$  donné par Ulrich et Hawkins (1981) sous la condition d'une masse de l'enveloppe du soleil dans l'intervalle  $0,01 < M_e / M_0 < 0,04$  et avec une loi de rotation différentielle de la surface du soleil qui est la même à travers toute l'enveloppe convective sans variation en fonction de la profondeur et qui ont prédit que toute déviation de cet intervalle s'expliquerait justement par le fait que cette loi ne soit pas constante en fonction de la profondeur. C'est ce qui se vérifie avec les modèles de rotation utilisés et qui introduisent un gradient radial de rotation dans la zone convective et près de la surface. Cette comparaison montre aussi que les valeurs de  $J_2$  de la table 3.1 sont situées au-dessous de la borne supérieure de 3,10<sup>-6</sup> déterminée à partir de l'étude des librations lunaires (Rozelot et Bois, 1998). Elles sont aussi compatibles avec des valeurs récentes comme celle de 2,22×10<sup>-7</sup> obtenue par Paternò et al. (1996) et 2,18×10<sup>-7</sup> obtenue par Pijpers (1998). Notons aussi que la valeur de 2,205×10<sup>-7</sup> que nous avons dans le cas du modèle de Kosovichev est pratiquement égale a celle de 2,208×10<sup>-7</sup> obtenue par I.W Roxburgh (2001) en utilisant le même modèle de rotation. Elles sont toutefois largement plus grande que celle de 1,6×10<sup>-7</sup> obtenue par Godier et al. (1999). Elle sont aussi plus grandes que la valeur de 1,8×10<sup>-7</sup> mesurée par Lydon et Sofia (1996).

Enfin, les résultats du calcul de l'aplatissement au premier ordre (l=2) sont donnés par la table 3.3. Ces valeurs de  $\varepsilon$  sont données pour les différentes valeurs de  $\Omega_s$  et J<sub>2</sub> correspondant à chaque modèle de rotation :

Modèle de rotation	$\Omega_{\rm s}(\mu r d/s)$	$J_2(.10^{-7})$	ε (.10 <sup>-6</sup> )
Rotation uniforme ( $\Omega_0 = 435 \text{nHz}$ )	2,73	2,217	9,797
Modèle de Kosovichev	2,6	2,205	8,916
Modèle de Corbard (a)	2,59	2,201	8,849
Modèle de Corbard (b)	2,59	2,198	8.849

**Table 3.3 :** Valeurs de l'aplatissement  $\varepsilon$  à l'ordre *l*=2 pour une rotation uniforme et les différents modèles de rotation.

A partir de la table 3.3, nous remarquons, en comparant les résultats des différents modèles de rotation avec celui de la rotation uniforme, que malgré la faible différence entre les valeurs de J<sub>2</sub>, l'aplatissement est considérablement diminué de l'ordre de 9% par l'introduction de la rotation différentielle. La table 3.3 montre que l'aplatissement est sensible au changement dans la valeur de la vitesse de rotation effective  $\Omega_s$ . Ceci provient du fait que cette dernière intervient dans le dernier terme de l'équation (2.78) qui est beaucoup plus important que le premier (l'aplatissement dû à la rotation de surface est dominant par rapport à celui causé par la rotation interne qui s'écrit en fonction des moments gravitationnels J<sub>l</sub>).

Aussi, nous remarquons une légère diminution de l'ordre de 0,7 %, de l'aplatissement dans le cas du modèle de Corbard (a) et (b) par rapport au modèle de Kosovichev. Cette légère différence peut provenir du fait que le premier modèle prend en compte un gradient radial de rotation près de la surface négatif à basse latitude et positif à haute latitude héliographique, déterminé à partir de l'héliosismologie, tandis que le second modèle prend en compte un gradient radial constant et négatif en fonction de la latitude et dont la détermination est basée sur l'hypothèse de la conservation du moment angulaire dans les couches de supergranulation.

## 3.2.2 Deuxième ordre (*l=4*)

Au deuxième ordre (l=4), les profils qui décrivent la perturbation du potentiel gravitationnel y<sub>14</sub> (fig. 3.4 (a) et (b)) pour un même modèle solaire et pour différents modèles de rotation, obtenus à partir de la méthode directe, montrent un comportement globalement similaire sauf

pour le cas de la rotation uniforme où la perturbation  $y_{14}$  est nulle sur tout le rayon. Elle est aussi égale à zéro pour tous les modèles de rotation différentielle jusqu'à la valeur de  $0.6R_0$ pour le modèle de Kosovichev et  $0,65R_0$  pour le modèle de Corbard (a) et (b), où la perturbation  $y_{14}$  augmente brusquement jusqu'à une valeur maximale autour de  $0,71R_0$  (début de la zone convective). A partir de  $0,71R_0$ , la perturbation  $y_{14}$  commence à diminuer brusquement passant par une valeur nulle autour de  $0,78R_0$  jusqu'à une valeur négative minimale se situant autour de  $0,97R_0$ . A partir de  $0,97R_0$ , la perturbation  $y_{14}$  recommence à augmenter jusqu'à la surface tout en restant négative.

Les augmentations brusques des perturbations qui surviennent à la fin de la zone radiative et jusqu'à  $0,71R_0$  peuvent être associées à la présence de la tachocline et la différence entre la valeur du rayon où interviennent ces augmentations est attribuée à des largeurs différentes de la tachocline dans ces deux modèles. Nous pouvons d'ores et déjà dire qu'au deuxième ordre, la rotation différentielle crée une perturbation y<sub>14</sub> tandis qu'elle est nulle pour une rotation uniforme.

La comparaison des profils de perturbation  $y_{14}$  montre que la perturbation au second ordre, dans la zone convective, est plus petite dans le cas du modèle de Kosovichev que dans le cas du modèle de Corbard (a) et (b). Cette tendance s'inverse clairement à partir de  $0,9R_0$  jusqu'à la surface. Comme au premier ordre, cette différence provient du fait que le gradient radial de rotation dans le modèle de Kosovichev est constamment négatif, tandis pour le modèle de Corbard (a) et (b) il est négatif à basse latitude et positif à haute latitude héliographique.

La comparaison du profil de la perturbation  $y_{14}$  correspondant au modèle de Corbard (a) avec celui correspondant au modèle de Corbard (b), montre que la perturbation  $y_{14}$  dans la zone convective est plus grande dans le premier modèle que dans le second. A partir de  $0,9R_0$ , cette tendance s'inverse et la perturbation  $y_{14}$  correspondant au modèle de Corbard (a) devient négativement nettement plus petite et ceci jusqu'à la surface. Cette différence entre ces deux modèles provient certainement du fait que dans le modèle de Corbard (b) le gradient radial de rotation considéré prend des valeurs positives à haute latitude beaucoup plus grande que dans le modèle de Corbard (a) (fig. 2.3).

La table (3.4) présente les valeurs en surface du potentiel perturbé  $y_{14}$  et les valeurs des moments octopolaires  $J_4$  correspondants obtenues à partir des deux méthodes théoriques développées précédemment et ceci en fonction d'une vitesse de rotation uniforme ainsi que les différents modèles de rotation différentielle utilisés. Cette table révèle des valeurs du moment octopolaire  $J_4$  qui sont compatibles entre elles, car elles sont du même ordre de grandeur qui est de  $10^{-9}$ . Nous remarquons que la valeur du moment octopolaire  $J_4$  est nulle dans le cas d'une rotation uniforme. Aussi, les valeurs absolues de  $J_4$  correspondant au modèle de Corbard (a) et (b) sont plus grandes que la valeur absolue de  $J_4$  obtenue avec le modèle de Corbard (a) est à son tour plus grand que celle correspondant au modèle de Corbard (a) est à son tour plus grand que celle correspondant au modèle de Corbard (b). Cette différence provient du fait que dans le modèle de Corbard (b), les valeurs positives du gradient radial à haute latitude sont beaucoup plus importantes que dans le modèle de Corbard (a).



**Figure 3.4 (a) :** Profils du potentiel perturbé  $y_{14}$  le long du rayon solaire pour les différents modèles de rotation utilisés.



**Figure 3.4 (b) :** Zoom sur la partie de  $0,6R_0$  à  $R_0$  de la figure 3.4 (a).
	Méthode directe		Méthode de Green	
Modèle de rotation	$Y_{14}(1)$ (.10 <sup>-4</sup> )	J <sub>4</sub> (.10 <sup>-9</sup> )	$Y_{14}(1)$ (.10 <sup>-4</sup> )	J <sub>4</sub> (.10 <sup>-9</sup> )
Rotation uniforme ( $\Omega_0 = 435 \text{nHz}$ )	pprox 0	≈ 0	≈ 0	≈ 0
Modèle de Kosovichev	-2,3478	-4,4548	-2,3477	-4,4546
Modèle de Corbard (a)	-2,9524	-5,6019	-2,9520	-5,6011
Modèle de Corbard (b)	-2,5331	-4,8063	-2,5324	-4,8050

**Table 3.4 :** Valeurs en surface du potentiel perturbé d'ordre l=4 "y<sub>14</sub>", et valeurs du moment octopolaire correspondant, pour une rotation uniforme et les différents modèles de rotation. Valeurs obtenues par les deux méthodes utilisées "Méthode directe" et "Méthode de Green".

Comme nous l'avons fait pour le premier ordre (l=2), et afin d'expliquer cette légère différence entre les modèles de Corbard (a) et (b), on a utilisé la méthode directe pour déterminer les profils de la perturbation du potentiel gravitationnel y<sub>14</sub> (fig. 3.5 (a) et (b)) pour les modèles de rotation correspondant aux courbes C<sub>a</sub>, C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>b</sub> (fig. 3.2).

A partir de la figure 3.5 (a) et (b) nous remarquons des différences entre les perturbations  $y_{14}$  sont beaucoup plus appréciables que pour  $y_{12}$ . Nous remarquons que plus la courbe du gradient radial de rotation présente des valeurs positives importantes à haute latitude, plus le profil de la perturbation  $y_{14}$  dans la zone convective diminue. Ce comportement continu jusqu'à  $0.9R_0$  où il s'inverse et les perturbations  $y_{14}$  deviennent plus fortes en fonction de gradients radiaux importants à haute latitude. A partir des valeurs de  $y_{14}$  en surface, la table 3.5 donne les valeurs du moment octopolaire  $J_4$  en fonction des différents modèles de rotation utilisés. Cette table montre que la valeur absolue de  $J_4$  est de plus en plus faible en fonction de gradients radiaux de rotation positivement de plus en plus importants l'un par rapport à l'autre à hautes latitudes héliographiques. Donc, le moment octopolaire  $J_4$  est sensible à la nature différentielle de la rotation et plus particulièrement à la présence d'un gradient radial près de la surface.

D'autre part, la comparaison de l'ensemble des valeurs du moment octopolaire J<sub>4</sub> de la table 3.4 avec celles publiées montre que seule la valeur de J<sub>4</sub> correspondant au modèle de Corbard (a) est extérieur à l'intervalle  $2,0\times10^{-9} < -J_4 < 5,0\times10^{-9}$  donné par Ulrich et Hawkins (1981). Cette comparaison montre aussi que les valeurs de J<sub>4</sub> de la table 3.4 sont incompatibles avec la valeur  $9,8\times10^{-7}$  mesurée par Lydon et Sofia (1996). Elles sont incompatibles aussi avec la valeur  $0,28\times10^{-11}$  déterminée par Rozelot et al. (2001) et la valeur  $2,85\times10^{-11}$  déterminée par Godier et al. (1999). D'autre part, la valeur de  $4,455\times10^{-9}$  que nous avons obtenue dans le cas du modèle de Kosovichev est pratiquement égale à celle de  $4,46\times10^{-9}$  obtenue par I.W Roxburgh (2001) en utilisant le même modèle de rotation.



**Figure 3.5 (a) :** Profils du potentiel perturbé  $y_{14}$  le long du rayon solaire pour les modèles de Corbard (a) et (b) et les modèles construits  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ . Profils obtenus à partir de la méthode directe.



**Figure 3.5 (b) :** Zoom sur la partie de  $0,7R_0$  à  $R_0$  des profils du potentiel perturbé  $y_{12}$  de la figure 3.5 (a).

Modèle de rotation	Ca	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>b</sub>
J <sub>4</sub> (10 <sup>-9</sup> )	-5,6019	-5,3994	-5,1993	-5,0016	-4,8063

**Table 3.5 :** Valeurs du moment octopolaire  $J_4$  en fonction des différents modèles de rotation qui prennent en compte un gradient radial de rotation près de la surface.

La table 3.6 donne les valeurs de l'aplatissement  $\epsilon$  en fonction des différentes valeurs des moments gravitationnels  $J_2$  et  $J_4$ :

Modèle de rotation	$\Omega_{\rm s}(\mu { m rd/s})$	$J_2(.10^{-7})$	J <sub>4</sub> (.10 <sup>-9</sup> )	ε (.10 <sup>-6</sup> )
Rotation uniforme ( $\Omega_0 = 435$ nHz)	2,73	2,217	≈ 0	9,797
Modèle de Kosovichev	2,6	2,205	-4,455	8,913
Modèle de Corbard (a)	2,59	2,201	-5,602	8,846
Modèle de Corbard (b)	2,59	2,198	-4,806	8,846

**Table 3.6 :** Valeurs de l'aplatissement  $\varepsilon$  à l'ordre *l*=4 pour une rotation uniforme et les différents modèles de rotation.

La table 3.6, correspondant aux deuxième ordre des perturbations (l=4), montre par comparaison à la table 3.3, que pour un même modèle de rotation, la valeur de l'aplatissement ne varie que très légèrement et ceci malgré la présence du moment octopolaire J<sub>4</sub> à côté du moment quadrupolaire J<sub>2</sub> dans l'équation (2.80). En effet, le dernier terme de cette équation qui contient  $\Omega_s$  reste dominant (l'aplatissement dû à la rotation de surface est dominant par rapport à celui causé par la rotation interne qui s'écrit en fonction des moments gravitationnels J<sub>l</sub>).

Nous remarquons aussi que, comme pour l=2, la contribution de la rotation différentielle à la valeur de l'aplatissement est une diminution d'environ 9% et que la considération d'un gradient radial de rotation près de la surface tirés de l'héliosismologie (modèle de Corbard (a) et (b)) diminue d'environ 0,7 % la valeur de l'aplatissement obtenu avec un modèle de rotation différentielle dans lequel le gradient radial est basé sur l'hypothèse de la conservation du moment angulaire dans les couches de supergranulation (modèle de Kosovichev).

Les valeurs obtenues de l'aplatissement dans le cas d'une rotation différentielle, sont compatibles avec la valeur de 8,77.10<sup>-6</sup> mesurée par Lydon et Sofia (1996) et déterminée théoriquement par Godier et Rozelot (2000). Elles sont toute fois incompatibles avec d'autres valeurs mesurées comme celle de 9,58.10<sup>-6</sup> Hill et Stebbins (1975), de 9,17.10<sup>-6</sup> Maier et al. (1992), de 9,27.10<sup>-6</sup> Rozélot (1998).

## 3.3 Applications

A titre d'applications, nous allons voir l'influence d'une rotation du cœur du Soleil plus lente ou plus rapide sur la valeur du moment quadrupolaire  $J_2$ . Nous verrons ensuite, à quel point les hélioïdes du type  $P_2$  et  $P_4$  peuvent contribuer à la résolution du problème de la variation latitudinale du diamètre solaire. Nous verrons en dernier la contribution du moment quadrupolaire  $J_2$  à l'avance du périhélie de Mercure.

#### 3.3.1 Influence de la rotation du cœur sur la valeur de J<sub>2</sub>

Nous avons vu en introduction que la vitesse de rotation du cœur du Soleil (en dessous de  $0,2R_0$ ) est très mal connue du fait qu'elle est déterminée par l'analyse des ondes de gravité qui sont très difficiles à détecter. A titre d'application, il est intéressant de voir quelles serait les conséquences sur les paramètres de forme, d'un cœur tournant plus rapidement ou plus lentement que la vitesse rigide  $\Omega_0$  de la zone radiative. Nous avons vu dans le chapitre 2 que à l'aide de la méthode de Green la perturbation du potentiel gravitationnelle à l'ordre *l*=2 est donnée par :

$$V_{12}(R_0) = \int_{0}^{R_0} G_2(R_0, r) \cdot F_2(r) dr$$
(3.1)

Donc la représentation de  $G_2(R_0, r).F_2(r)$  va nous permettre d'évaluer la contribution du cœur à la valeur de la perturbation en surface.



Figure 3.6 : Superposition des fonctions  $G_2(R_0, r).F_2(r)$  en fonction de r correspondants à différentes valeurs de la rotation du cœur du Soleil (en dessous de  $0,2R_0$ ).

Nous voyons bien à travers la figure qu'un cœur (en dessous de  $0,2R_0$ ) en rotation plus rapide ou plus lente que la zone radiative ne change pas le profil de la fonction  $G_2(R_0,r).F_2(r)$  et que cette dernière est pratiquement nulle en dessous de  $0,2R_0$ , donc sa contribution à la valeur de la perturbation en surface  $V_{12}(R_0)$  est complètement négligeables et de ce fait la valeur de  $J_2$ reste inchangée.

# **3.3.2** Contribution à la résolution du problème des variations latitudinales du diamètre solaire

Comme nous l'avons vu précédemment, la surface d'un corps en rotation lente ne s'écarte que très légèrement de la sphère. Ces écarts peuvent être vus comme de petites perturbations et on peut les exprimer par un développement en série des polynômes de Legendre par la relation suivante (n étant un nombre entier pair) :

$$\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R}_0 \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{r}_n (\mathbf{R}_0) \mathbf{P}_n(\theta) \right)$$
(3.2)

 $R_0$  est le rayon moyen du soleil et les fonctions  $r_n$  caractérisent le poids des déformations de la surface décrite par les polynômes de Legendre  $P_n(\theta)$  et leur détermination est primordiale pour étudier les distorsions subi par la surface. La surface d'un corps, dans l'hypothèse d'une rotation lente, peut s'écrire comme celle d'un ellipsoïde de révolution. Les coordonnées r et  $\theta$  sont alors reliées par l'équation décrivant un ellipsoïde ( $R_e$  étant la rayon équatorial et  $R_p$  étant la rayon polaire) :

$$\frac{R^{2}\cos^{2}\theta}{R_{e}^{2}(1-f)^{2}} + \frac{R^{2}\sin^{2}\theta}{R_{e}^{2}} = 1$$
(3.3)

où f est l'aplatissement de l'ellipsoïde définit par (Rozelot et al. 2001) :

$$f = \frac{R_e - R_p}{R_e}$$
(3.4)

D'un autre côté l'ellipticité moyenne est définit par (Rozelot et al. 2001) :

$$F = \frac{R_e - R_p}{R_s}$$
(3.5)

où R<sub>s</sub> est le rayon de la meilleure sphère qui passe à travers R<sub>e</sub> et R<sub>p</sub>.

Notons que l'équation (3.5) diffère de l'équation (3.4), mathématiquement parlant, et que l'équation (3.5) associée à l'approximation  $R_s \approx R_e \approx R_0$  donne l'équation (3.4) qui est fréquemment connue sous le nom d'aplatissement. L'équation (3.3) devient donc :

$$\frac{R^2 \cos^2 \theta}{R_e^2 (1-\varepsilon)^2} + \frac{R^2 \sin^2 \theta}{R_e^2} = 1$$
(3.6)

En considérant R comme étant une fonction de  $\theta$  et en développant R( $\theta$ ) en puissance de  $\varepsilon$  jusqu'à l'ordre 2, l'équation (3.6) devient :

$$R(\theta) = R_{e} \left( 1 - \varepsilon \cos^{2} \theta - \frac{3}{2} \varepsilon^{2} \sin^{2} \theta \cos^{2} \theta \right)$$
(3.7)

Cette expression s'écrit en fonction des polynômes de Legendre P<sub>2</sub> et P<sub>4</sub> :

$$R(\theta) = R_{e} \left[ \left( 1 - \frac{1}{3}\varepsilon - \frac{1}{5}\varepsilon^{2} \right) + \left( -\frac{2}{3}\varepsilon - \frac{1}{7}\varepsilon^{2} \right) P_{2}(\theta) + \left( \frac{12}{35}\varepsilon^{2} \right) P_{4}(\theta) \right]$$
(3.8)

En comparant l'équation (3.8) avec l'équation (3.2), nous pouvons facilement déduire que :

$$\mathbf{r}_{2} = \frac{\left(-\frac{2}{3}\varepsilon - \frac{1}{7}\varepsilon^{2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}\varepsilon - \frac{1}{5}\varepsilon^{2}\right)} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{r}_{4} = \frac{\left(\frac{12}{35}\varepsilon^{2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}\varepsilon - \frac{1}{5}\varepsilon^{2}\right)} \tag{3.9}$$

Les valeurs des paramètres  $r_2$  et  $r_4$  en fonction des valeurs de l'aplatissement de la table 3.6 correspondant aux différents modèles de rotation sont données par la table 3.7 :

Modèle de rotation	ε (.10 <sup>-6</sup> )	r <sub>2</sub> (.10 <sup>-6</sup> )	r <sub>4</sub> (.10 <sup>-11</sup> )
Rotation uniforme	9,797	-6,531	3,291
Modèle de Kosovichev	8,913	-5,942	2,724
Modèle de Corbard (a) et (b)	8,846	-5,897	2,683

**Table 3.7 :** Valeurs des paramètres  $r_2$  et  $r_4$  pour les valeurs de l'aplatissement correspondant à la rotation uniforme et aux différents modèles de rotation utilisés.

On remarque que ces valeurs sont pratiquement voisines sauf dans le cas d'une rotation uniforme où elles sont sensiblement différentes. Pour les modèles de Corbard (a) et (b) ces valeurs sont pratiquement égales.

En fonction de ces valeurs, la figure 3.7 (a) et (b) montre comment varie le rayon solaire en surface  $R(\theta)$  par rapport à sa valeur au pôle, en fonction de la colatitude $\theta$  et ceci à travers la relation (3.8), à cet effet nous avons appelé la courbe correspondant aux variations du rayon pour une rotation uniforme  $\Delta R_{uni}$ , pour le modèle de Kosovichev  $\Delta R_{Kos}$  et pour le modèle de Corbard  $\Delta R_{Cor}$ .

D'autre part Lydon et Sofia (1996), à partir des mesures du diamètre angulaire du soleil à l'aide de l'expérience SDS (Solar Disk Sextant), ont pu détecté des variations latitudinales du rayon solaire. L'ensemble de ces données observationnelles obtenues s'ajuste avec la relation  $8,6245 \times [1 - \cos (2\theta)]$  milli-arcsecs. La figure 3.8 (a) et (b) compare les courbes théoriques de la figure 3.7 (a) et (b) avec la courbe issue des données observationnelles obtenues par Lydon et Sofia que l'on appellera au même titre que les notations précédentes  $\Delta R_{obs}$ .

On remarque que la courbe observationnelle se rapproche plus de la courbe théorique correspondant à la rotation différentielle que celle correspondant à la rotation uniforme, et que l'amplitude de la variation du rayon solaire en fonction de la colatitude est plus grande dans le cas d'une rotation uniforme que dans les autres cas. En effet cette amplitude atteint une valeur maximale à l'équateur de l'ordre de 0,00944 arcsec tandis que qu'elle n'est que de 0,00862 et pour la courbe observationnelle et de 0,00859 et 0,00853 arcsec respectivement dans le cas du modèle de Kosovichev et de Corbard.



**Figure 3.7 (a) :** Variation du rayon solaire surfacique en fonction de la colatitude et ceci dans le cas d'une rotation uniforme et des différents modèles de rotation différentielle.



**Figure 3.7 (b) :** Zoom sur la partie autour de 90° de colatitude (l'équateur du soleil) de la figure 3.7 (a).



**Figure 3.8 (a) :** Comparaison de la variation théorique et observationnelle du rayon solaire surfacique en fonction de la colatitude.



**Figure 3.8 (b) :** Zoom sur la partie autour de 90° de colatitude (l'équateur du soleil) de la figure 3.8 (a).

Toutefois ces résultats sont en contradiction avec les variations latitudinales du diamètre solaire déterminées à partir des séries de mesures faites avec des astrolabes solaires en France (Laclare et al. 1999) et au Chili (Nöel, 1999) (fig. III.11). En effet, la comparaison de ces données avec la valeur moyenne du diamètre a montré que le diamètre mesuré est plus grand autour de 45° de latitude avec un écart de 0,04 arcsec et plus petit autour de 25° et 70° que le diamètre moyen avec un écart de 0,07 arcsec, ce qui représente des amplitudes de pratiquement un ordre de magnitude plus grandes que celles détectées par Lydon et Sofia (1996) et celles déterminées par nous théoriquement. La cause est certainement due à la turbulence atmosphérique.

# **3.3.3** Contribution du moment quadrupolaire J<sub>2</sub> à l'avance du périhélie de Mercure

L'orbite de Mercure serait une ellipse si elle était seulement soumise à l'action du Soleil; mais les autres planètes viennent perturber son mouvement. Il en résulte une modification des paramètres de son orbite au cours du temps. Ainsi, le périhélie de Mercure tourne dans le plan de son orbite. Les observations fixent ce déplacement à 570" environ par siècle. La théorie ne permet de justifier qu'une partie de cette valeur et il reste un résidu inexpliqué de 43". Diverses tentatives ont été faites pour justifier ce résidu, comme l'existence d'une planète intra-mercurienne, mais elles n'ont pas été confirmées par l'observation. Ce n'est qu'avec l'énoncé de la théorie de la relativité générale d'Einstein que ce problème a pu être résolu, en 1917. En effet, la théorie de la relativité prévoit une avance supplémentaire du périhélie de Mercure de 43". Ainsi la théorie de la relativité a permis d'expliquer l'avance du périhélie de Mercure, et, inversement, cette explication a conforté la véracité de la théorie de la relativité générale. L'un des tests les plus célèbres de la relativité générale consiste à combiner les mesures de la précession de l'orbite de mercure avec la détermination du moment gravitationnel quadrupolaire du soleil J2. Dans le formalisme PPN (Post Parametrized Newtonian), la partie purement relativiste de l'avance du périhélie de Mercure  $\Delta \omega$  par période orbital, corrigée des perturbations provenant des autres planètes, est donnée par la relation suivante :

$$\Delta \omega = \frac{6\pi \,\mathrm{G}\,\mathrm{M}_0}{\mathrm{a}\,(1-\mathrm{e}^2)\,\mathrm{c}^2} \left(\frac{1}{3}(2-\beta+2\gamma) + \frac{\mathrm{R}_0^2\mathrm{c}^2}{6\,\mathrm{G}\,\mathrm{M}_0\mathrm{a}\,(1-\mathrm{e}^2)}\,\mathrm{J}_2\right)$$
(3.10)

où les grandeurs a et e sont respectivement le demi-grand axe et l'excentricité de l'orbite de Mercure, c la vitesse de la lumière, G la constante gravitationnelle,  $M_0$ ,  $R_0$ , et  $J_2$  la masse, le rayon moyen et le moment quadrupolaire du soleil. Les grandeurs  $\beta$  et  $\gamma$  sont les paramètres d'Eddington-Robertson du formalisme PPN, ils mesurent respectivement la non-linéarité de la gravitation et la courbure de l'espace. Dans la théorie de la relativité générale, ces coefficients sont égaux à 1.

A partir de la relation (3.10) il est clair que la contribution solaire à l'avance du périhélie de Mercure à travers le moment quadrupolaire  $J_2$  est donnée par :

$$\Delta \omega_{0} = \frac{6\pi \,\mathrm{G}\,\mathrm{M}_{0}}{\mathrm{a}\,(1 - \mathrm{e}^{2})\mathrm{c}^{2}} \times \frac{\mathrm{R}_{0}^{2}\mathrm{c}^{2}}{6\,\mathrm{G}\,\mathrm{M}_{0}\mathrm{a}\,(1 - \mathrm{e}^{2})}\mathrm{J}_{2}$$

$$= 42,9794 \times 2,96.10^{3} \times \mathrm{J}_{2} \qquad \text{arcsec/siècle} \qquad (3.11)$$

L'équation (3.10) devient donc :

$$\Delta \omega = 42,9794 \left( \frac{1}{3} (2 - \beta + 2\gamma) + 2,96.10^3 \text{ J}_2 \right) \qquad \text{arcsec / siècle} \qquad (3.12)$$

avec : 1 arcsec=1/3600 degré.

Cette dernière relation nous permet d'étudier l'influence du moment quadrupolaire  $J_2$  sur la contribution solaire à l'avance du périhélie de Mercure et ceci grâce aux différentes valeurs de  $J_2$  obtenues pour les différents modèles de rotation utilisés (Table 3.1).

D'autre part, en utilisant le positionnement planétaire par radar, Shapiro et al. (1976) ont trouvé une précession anormale de l'orbite de Mercure qui est de l'ordre de 43,11  $\pm$  0,21 arcsec/siècle. A leur tour, en utilisant le positionnement par radar et par engin spatial, Anderson et al. (1987) ont trouvé 42,92  $\pm$  0,20, et une mise à jour (Anderson et al. 1991) qui à aboutit à une valeur de 42,94  $\pm$  0,20. La valeur la plus récente est donnée par Anderson et al. (1992) qui est 43,13  $\pm$  0,14. La combinaison de la valeur la plus récente de la précession anormale de l'orbite de Mercure avec la valeur du moment quadrupolaire J<sub>2</sub>, nous permet d'évaluer le terme (2- $\beta$ +2 $\gamma$ )/3 intervenant dans l'expression (3.12) qui d'après le relativité générale doit être égale à l'unité. Ces résultats sont présentés dans la table 3.8.

A partir de cette table, on remarque que la contribution solaire à l'avance du périhélie de Mercure à travers le moment quadrupolaire  $J_2$  a une valeur voisine de 0,028 arcsec/siècle et que le terme contenant la combinaison des paramètres du formalisme PPN est effectivement égale à 1 en total accord avec les prédictions de la relativité générale et ceci sachant que le résidu de 0,00285 est entièrement du aux données du positionnement planétaire par radar.

Modèle de rotation	$\Omega_{\rm s}(\mu { m rd})$	$J_2(.10^{-7})$	Δω <sub>0</sub> (arcsec/siècle)	(2-β+2γ)/3
Rotation uniforme ( $\Omega_0 = 435 \text{nHz}$ )	2,73	2,217	0,0282	1,00285
Modèle de Kosovichev	2,6	2,205	0,0281	1,00285
Modèle de Corbard (a)	2,59	2,201	0,0280	1,00285
Modèle de Corbard (b)	2,59	2,198	0,0280	1,00285

**Table 3.8 :** Influence du moment quadrupolaire  $J_2$  sur la contribution solaire à l'avance du périhélie de Mercure ainsi que la valeur du terme  $(2-\beta+2\gamma)/3$  et ceci pour une rotation uniforme et les différents modèles de rotation.

## 3.4 Conclusion du chapitre 3

Au premier ordre, la rotation différentielle augmente très légèrement la perturbation  $y_{12}$  du potentiel gravitationnel dans la zone convective par rapport à la perturbation  $y_{12}$  obtenue pour une rotation uniforme, par contre cette tendance s'inverse près de la surface du fait certainement de la présence dans cette zone du gradient radial de rotation. De ce fait les valeurs de J<sub>2</sub> se trouveront légèrement diminuées (d'environ 0,5 à 0,8 %) par rapport à la valeur correspondant à la rotation uniforme. Les profils des perturbations  $y_{12}$  sont caractérisés par une anomalie autour de 0,7R<sub>0</sub> qui est liée à la présence de la tachocline.

Au deuxième ordre, les perturbations  $y_{14}$  sont nulles jusqu'à l'entrée de la tachocline où elle commence à être sensible à la rotation différentielle. Donc, nous pouvons dire qu'au deuxième ordre, la rotation différentielle crée une perturbation tandis qu'elle est nulle pour une rotation uniforme.

D'autre part et d'une manière générale, les valeurs absolues des perturbations  $y_{12}$  et  $y_{14}$  sont légèrement croissantes dans la zone convective et légèrement décroissantes en surface et ceci en fonction de gradients radiaux de rotation près de la surface positivement de plus en plus important à haute latitude. Ces variations sont beaucoup plus accentuées au deuxième ordre des perturbation qui donne la valeur du moment gravitationnel recherché, les valeurs absolues des moments quadrupolaire et octopolaire  $J_2$  et  $J_4$  se trouveront elles aussi diminuées. Cette diminution est beaucoup plus sensible au deuxième ordre des perturbations  $y_{14}$  (fig. 3.5 (b)), engendrant une diminution sensible du moment octopolaire  $J_4$  correspondant à la table 3.5, qu'au premier ordre des perturbations  $y_{12}$  (fig. 3.3 (c)) correspondant à la faible diminution du moment quadrupolaire  $J_2$  de la table 3.2.

En résumé, tous ces résultats permettent de dire que le moment octopolaire  $J_4$  est beaucoup plus sensible que le moment quadrupolaire  $J_2$  à la nature différentielle dans la zone de convection et particulièrement à la présence d'un gradient radial de rotation près de la surface. Concernant l'aplatissement, par rapport à la valeur obtenue pour une rotation uniforme, il est nettement diminué par l'introduction de la rotation différentielle (d'environ 9%). Il est par contre moins sensible aux différents gradients radiaux de rotation près de la surface présents dans les différents modèles de rotation utilisés.

L'étude de la variation latitudinale du rayon solaire a montré que l'amplitude de variation du rayon est plus grande dans le cas d'une rotation uniforme que dans le cas d'une rotation différentielle. La variation latitudinale théorique du rayon dans le cas d'une rotation différentielle se rapproche plus des résultats observationnels que la variation correspondant à la rotation uniforme.

La combinaison entre les différentes valeurs de  $J_2$  obtenues et les mesures de la précession de l'orbite de Mercure donne des résultats conforme aux prédictions de la Relativité Générale.

# **Conclusion générale**

## Synthèse des résultats obtenus

#### Les motivations

Afin d'apporter une nouvelle contribution à l'étude théorique des déformations subies par la surface du soleil à cause de sa rotation, les paramètres qui définissent la forme du soleil, appelés "moments gravitationnels", ont été déterminés et ceci en utilisant un nouveau modèle analytique décrivant la rotation différentielle du Soleil et mettant en évidence, à partir de données observationnelles de l'héliosismologie, la présence d'un gradient radial de rotation près de la surface. La détermination précise des ces paramètres de forme permet de calculer l'aplatissement du soleil et de voir les variations latitudinales du diamètre qu'il induit pour ensuite les comparer à celles détectées par l'observation. Ces paramètres permettent aussi de déterminer de manière très précise les orbites des corps célestes proches du Soleil et en particulier la contribution du moment quadrupolaire  $J_2$  à l'avance du périhélie de Mercure.

#### Les travaux entrepris

La détermination théorique des paramètres de forme du soleil nécessite la résolution d'un problème de deux valeurs aux limites au centre et à la surface du soleil, ce qui se résume en la résolution numérique d'une équation différentielle qui résulte de la combinaison de l'équation de l'équilibre hydrostatique du soleil et de l'équation de poisson de son potentiel gravitationnel. Pour cela, et vu que la rotation du soleil est considérée comme lente, des techniques de perturbation ont été utilisées pour traiter les effets de la rotation comme de petites perturbations superposées à un modèle solaire sphérique connu. Du fait que c'est la valeur en surface de la perturbation du potentiel gravitationnel qui nous donne la valeur du moment gravitationnel correspondant à l'ordre étudié, ce modèle solaire sphérique, qui est un modèle de densité et de masse, est choisi de sorte qu'il soit bien calibré en surface de façon à calculer les paramètres de forme d'une manière correcte. En outre l'utilisation de plusieurs modèles de rotation prenant en compte la rotation différentielle dans la zone convective avec notamment la présence d'un gradient radial de rotation près de la surface, déterminé à partir de l'observation (l'héliosismologie), a permis de comparer les résultats entre eux ainsi qu'avec le cas d'une rotation uniforme, et a permis aussi de voir l'influence de la rotation différentielle sur les valeurs des paramètres de forme. Afin de conforter les résultats obtenus deux méthodes fondamentalement différentes ont été utilisées pour la résolution de l'équation qui régit la structure du soleil : une méthode différentielle (méthode directe) et une méthode intégrale (méthode de Green).

Enfin, nous avons déterminé à partir des moments gravitationnels calculés, l'aplatissement théorique du soleil et les variations latitudinales du diamètre solaire qu'il induit. Aussi, une comparaison a été effectuée avec certains résultats observationnels. Nous avons ensuite évalué, à partir de la valeur du moment gravitationnels quadrupolaire  $J_2$ , la contribution de ce dernier à l'avance du périhélie de Mercure.

#### Les résultats

A travers l'étude de la perturbation du potentiel gravitationnel, je me suis particulièrement intéressé à la détermination du moment quadrupolaire  $J_2$  et du moment octopolaire  $J_4$ , qui correspondent respectivement au premier et au deuxième ordre des perturbations.

Au premier ordre, les profils de la perturbation du potentiel gravitationnel  $y_{12}$  pour les différents modèles de rotation, obtenus à partir de la méthode différentielle (méthode directe), sont caractérisés par une augmentation jusqu'à une valeur maximale autour de 0,48R<sub>0</sub> dans la zone radiative puis une diminution progressive jusqu'à la surface. Cette diminution est marquée par une anomalie autour de 0,7R<sub>0</sub> qui est liée à la présence d'une zone de fort cisaillement qui fait la transition entre la zone radiative qui est caractérisée par une rotation pratiquement uniforme, et la zone convective où la rotation est différentielle. Cette zone est appelée "tachocline".

Les profils de  $y_{12}$  ont montré que la valeur de la perturbation dans la zone radiative est la même quelque soit le modèle de rotation jusqu'à une valeur de  $0,6R_0$ , ce qui est tout à fait logique vu que cette zone est caractérisée par une même vitesse de rotation uniforme pour tous les modèles de rotation utilisés. A partir de la valeur  $0,6R_0$ , les perturbations  $y_{12}$  deviennent légèrement dépendantes de la nature différentielle de la rotation. La perturbation  $y_{12}$  dans la zone convective est légèrement plus forte dans le cas d'une rotation différentielle que dans le cas de la rotation uniforme, par contre en surface elle est au contraire légèrement plus faible dans le cas d'une rotation différentielle que dans le cas de la rotation uniforme. D'autre part, la perturbation  $y_{12}$  en général n'est que très peu sensible à la présence du gradient radial de rotation près de la surface.

Les valeurs du moment quadrupolaire  $J_2$  obtenues à partir des deux méthodes pour chaque modèle de rotation, sont très voisines et pratiquement égales. Du moment que  $J_2$  est linéairement lié à la valeur en surface de la perturbation  $y_{12}$ , il n'est que très légèrement sensible à l'inclusion de la rotation différentielle dans la zone convective et particulièrement à la présence du gradient subsurfacique. En effet, la rotation différentielle ne diminue que de 0,5 à 0,8% la valeur du moment quadrupolaire  $J_2$  par rapport sa valeur obtenue pour une rotation uniforme. Cependant, toutes ces valeurs restent toujours plus faibles que celle correspondant à la rotation uniforme. Elles sont aussi très compatibles avec la majorité des valeurs récentes déterminées soit théoriquement soit expérimentalement par d'autres auteurs ( $\approx 2, 2.10^{-7}$ ).

Au second ordre, les profils de la perturbation du potentiel gravitationnel  $y_{14}$ , obtenus à partir de la méthode différentielle (méthode directe), montrent que la perturbation  $y_{14}$ correspondant à la rotation uniforme est nulle sur tout le rayon. Elle est aussi égale à zéro pour tous les autres modèles de rotation jusqu'à des valeurs autour de  $0,6R_0$  où intervient une augmentation brusque jusqu'à une valeur autour de  $0,71R_0$ . Cette augmentation brusque est liée à la présence de la tachocline. A partir de  $0,71R_0$ , les perturbation  $y_{14}$  commencent à diminuer brusquement passant par une valeur nulle autour de  $0,78R_0$  jusqu'à une valeur négative minimale se situant autour de  $0,97R_0$ . A partir de  $0,97R_0$ , les perturbations  $y_{14}$ recommencent à augmenter jusqu'à la surface tout en restant négatives. Donc, au deuxième ordre des perturbations, la rotation différentielle crée une perturbation  $y_{14}$  tandis qu'elle est nulle pour une rotation uniforme.

Les différents profils des perturbations  $y_{14}$  obtenues ont montré que, comme au premier ordre (*l*=2), la valeur absolue de la perturbation  $y_{14}$  augmente progressivement dans la zone convective et diminue progressivement à la surface en fonction de gradients radiaux de rotation positivement de plus en plus importants l'un par rapport à l'autre à hautes latitudes héliographiques.

Les valeurs du moment octopolaire J<sub>4</sub>, obtenues à partir des deux méthodes, sont très voisines et pratiquement égales. On remarque quelques différences entre celles obtenues à partir des différents modèles de rotation utilisés. Ces différences sont plus importantes que dans le cas de J<sub>2</sub>. En effet, comme pour la perturbation  $y_{14}$  en surface, la valeur absolue de J<sub>4</sub> diminue progressivement en fonction de gradients radiaux positivement plus important à hautes latitudes. Donc, le moment octopolaire J<sub>4</sub> est sensible à la nature différentielle de la rotation et plus particulièrement à la présence d'un gradient radial près de la surface. Toutefois, toutes ces valeurs sont du même ordre de grandeur qui est de 10<sup>-9</sup> et sont compatibles avec certaines valeurs récentes déterminées théoriquement par d'autres auteurs.

En résumé, tous ces résultats permettent de dire que le moment octopolaire  $J_4$  est beaucoup plus sensible que le moment quadrupolaire  $J_2$  à l'inclusion de la rotation différentielle et particulièrement à la présence d'un gradient radial de rotation près de la surface.

Le calcul de l'aplatissement du soleil, en fonction des différentes valeurs de  $J_2$  et  $J_4$  obtenues pour les différents modèles de rotation utilisés, a montré que par comparaison à la valeur obtenue pour une rotation uniforme, il est considérablement diminué par l'inclusion de la rotation différentielle. Cette diminution est de l'ordre de 9%. Il n'est toutefois pas sensible aux détails de la rotation différentielle et particulièrement la présence d'un gradient radial près de la surface.

A partir des valeurs obtenues de l'aplatissement, et dans le but d'étudier les variations latitudinales du diamètre solaire, les paramètres  $r_2$  et  $r_4$  qui caractérisent le poids des déformations de la surface du soleil ont été calculés pour chaque modèle de rotation. Ces déformations sont décrites respectivement par les polynômes de Legendre  $P_2(\theta)$  et  $P_4(\theta)$ . Les valeurs des ces paramètres sont pratiquement voisines sauf dans le cas d'une rotation uniforme où elles sont sensiblement différentes.

L'étude de la variation latitudinale du diamètre solaire a montré que l'amplitude de variation du rayon est plus grande dans le cas d'une rotation uniforme que dans le cas d'une rotation différentielle. D'autre part, la courbe observationnelle de la variation du diamètre solaire, obtenue par Lydon et Sofia (1996) se rapproche plus de la courbe théorique correspondant à la rotation différentielle que celle correspondant à la rotation uniforme. Toutefois ces résultats sont en contradiction avec les variations latitudinales du diamètre solaire déterminées à partir des séries de mesures faites avec des astrolabes solaires en France (Laclare et al. 1999) et au Chili (Nöel, 1999) et qui présentent des amplitudes d'un ordre de magnitude plus grande que celles détectées par Lydon et Sofia (1996) et celles que nous avons déterminées théoriquement.

Enfin, l'influence du moment quadrupolaire  $J_2$  sur la contribution solaire à l'avance du périhélie de Mercure a été étudiée et ceci grâce aux différentes valeurs de  $J_2$  obtenues correspondant aux différents modèles de rotation utilisés. D'autre part, le terme contenant les paramètres d'Eddington-Robertson du formalisme PPN (Post Parametrized Newtonian) dans la partie purement relativiste de l'avance du périhélie de Mercure, était dans tous les cas égal à l'unité, ce qui est en totale conformité avec les prédictions de la relativité générale.

## Les perspectives

Dans les jours qui viennent, il est prévu de refaire les mêmes développements afin de calculer les moments gravitationnels  $J_6$  et  $J_8$  correspondant respectivement au troisième et quatrième ordre des perturbations. Ce calcul permettra de déterminer leur ordre de grandeur et de quantifier leurs contributions aux déformations de la surface du soleil.

D'autre part, il est vrai que l'approximation qui consiste à négliger l'effet du champ magnétique moyen du soleil est pleinement justifiée. Cependant, il serait intéressant de prendre en compte ces forces dans les équations du mouvement pour mieux mettre en évidence les zones de transition (tachocline) qui sont le siège de la fabrication (effet dynamo) et du stockage du champ magnétique. L'approche qui consiste à considérer le champ magnétique fera l'objet d'un travail futur.

Dans un avenir assez proche (2004-2006) et sous l'égide des accords de coopération entre le CRAAG et l'Observatoire de la Côte d'Azur et l'Université de Nice Sophia Antipolis, nous pourrons avoir accès aux données au sol du diamètre et de l'aplatissement solaire fournis conjointement par DORAYSOL et SODISM II à Calern (Nice) et pour lesquelles les effets de la turbulence atmosphérique seront préalablement déterminés et quantifiés par l'instrument MISOLFA qui fonctionnera simultanément avec ces deux instruments. A ces données viendront s'ajouter celles fournies hors atmosphère par le télescope SODISM I (dont SODISM II est la réplique au sol) à bord du microsatellite PICARD (mission CNES) dont le lancement est prévu en 2006. Toutes ces données seront ainsi réunies afin d'être analysées et traitées pour être ensuite comparées aux résultats théoriques obtenus.

Notons que l'Algérie à travers le CRAAG fait partie d'un réseau international de suivi au sol du rayon solaire encore en constitution, et ceci avec l'installation prochaine à l'Observatoire de Tamanrasset d'une réplique exacte de l'instrument DORAYSOL qui est en construction actuellement dans les ateliers de Calern (Nice). Ce réseau regroupera d'autres pays qui envisagent de construire un DORAYSOL : le Brésil, la Turquie, l'Espagne, etc.

# Annexes

# A. Equations en coordonnées cylindriques et sphériques

### A.1 Les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques

Les composants des équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques sont :

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_{\theta}^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) + F_r$$

$$\frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + v \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{\rho} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + v \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{v_r v_{\theta}}{\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\rho}$$
(A.1)

$$\frac{\partial v_{\theta}}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} + \frac{v_r v_{\theta}}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$+ v \left( \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta}}{r^2} \right) + F_{\theta}$$
(A.2)

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v_z \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + F_z$$
(A.3)

### A.2 Les équations de Navier-Stokes en coordonnées sphériques

Les composants des équations de Navier-Stokes en coordonnées sphériques sont :

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_{\theta}^2 + v_{\phi}^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v_{\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rv_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + F_r$$

$$(A.4)$$

$$\frac{\partial v_{\theta}}{\partial t} + v_{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{v_{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \phi} + \frac{v_{r} v_{\theta}}{r} - \frac{v_{\phi}^{2} \cot \theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial^{2} v_{\theta}}{\partial \theta^{2}} + \frac{1}{r^{2} \sin^{2} \theta} \frac{\partial^{2} v_{\theta}}{\partial \phi^{2}} + \frac{\cot \theta}{r^{2}} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^{2}} \frac{\partial v_{r}}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta}}{r^{2} \sin^{2} \theta} + \frac{1}{r^{2} \sin^{2} \theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} + F_{\theta}$$
(A.5)

$$\frac{\partial v_{\phi}}{\partial t} + v_{r} \frac{\partial v_{\phi}}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v_{\phi}}{\partial \theta} + \frac{v_{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial v_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{v_{r} v_{\phi}}{r} + \frac{v_{\theta} v_{\phi} \cot \theta}{r} = -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{1}{r^{2} \sin^{2} \theta} \frac{\partial^{2} v_{\phi}}{\partial \phi^{2}} + \frac{1}{r^{2} \sin^{2} \theta} \frac{\partial^{2} v_{\phi}}{\partial \phi^{2}} + \frac{\cot \theta}{r^{2}} \frac{\partial v_{\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r_{\phi}} \frac{\partial v_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^{2} \sin^{2} \theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \phi} - \frac{v_{\phi}}{r^{2} \sin^{2} \theta} \frac{\partial v_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{V_{\phi} v_{\phi}}{r^{2} \sin^{2} \theta} \frac{\partial v_{\phi}}{\partial \phi} \frac{\partial v_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{V_{\phi} v_{\phi}}{r^{2} \sin^{2} \theta} \frac{\partial v_{\phi}}{\partial \phi} \frac$$

## B. Fonction de Green (Mathews & Walker (1964), p : 267)

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$L(y) = \frac{d}{dx} (p(x).y') - q(x).y = f(x)$$
(B.1)

où p(x) > 0 et q(x) sont des fonctions continues sur un intervalle  $0 \le x \le l$ . L(y) est appelé opérateur différentiel self conjugué du second ordre.

Par simplicité, restreignons nous aux conditions aux limites :

$$y(0) = y(l) = 0$$
 (B.2)

Si l'équation homogène correspondant à l'équation (B.1) (i.e. f(x)=0) associée aux mêmes conditions aux limites (B.2) ne possède que des solutions triviales, on peut construire une fonction appelée fonction de Green de telle sorte que la solution du problème des valeurs aux limites non-homogène (B.1) est donnée par :

$$y(x) = \int_{0}^{t} G(x,\xi) f(\xi) d\xi$$
 (B.3)

La fonction de Green  $G(x,\xi)$  représentent la déviation y(x), qui est le résultat de l'action d'une force unitaire concentrée au point  $x = \xi$  (on entend par force unitaire concentrée, la  $\xi_{\pm\delta}$ 

force qui satisfait la condition  $\lim_{\delta \to 0} \int_{\xi-\delta}^{\infty} f(x) dx = 1$ ). Elle est construite de telle sorte que :

- 1- Par rapport à x,  $G(x,\xi)$  satisfait l'équation homogène correspondant à l'équation (B.1) et ceci pour  $0 \le x \le \xi$  et  $\xi < x \le l$ .
- 2-  $G(x,\xi)$  satisfait aux conditions aux limites (B.2).
- 3-  $G(x,\xi)$  est continue en  $x = \xi$ .
- 4-  $\frac{d}{dx}G(x,\xi)$  est discontinue en  $x = \xi$ .

Si  $y_1$  et  $y_2$  sont des solutions de l'équation homogène correspondant à l'équation (B.1) satisfaisant aux conditions  $y_1(0)=0$  et  $y_2(l)=0$ , l'expression de la fonction de Green est donnée par :

$$G(x,\xi) = \begin{cases} C. y_1(x).y_2(\xi) & pour \quad 0 \le x \le \xi \\ \\ C. y_2(x).y_1(\xi) & pour \quad \xi \le x \le l \end{cases}$$
(B.4)

avec :

$$C = \left[ \left( y_1(\xi) . y_2'(\xi) - y_1'(\xi) . y_2(\xi) \right) . p(\xi) \right]^{-1} = \left[ W(\xi) . p(\xi) \right]^{-1}$$
(B.5)

 $W(\xi) = \begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) \end{vmatrix}$  étant le Wronskien des solutions  $y_1$  et  $y_2$ .

# **Bibliographie**

- Afanas'eva, T. I. and M. D. Kislik. "Experimental determination of the Sun's flattening", *Sov. Astronomy*, 34 (6) (1990).
- Anderson, J. D., et al. "Radar and spacecraft ranging to Mercury between 1966 and 1988". *Proceedings ASA*. 324. 1991
- Armstrong, J. and J. R. Khun., "Interpreting the Solar limb shape distortions", *ApJ*, 525: 533-538 (1999).
- Bender, C. M. and S. A. Orszag. Advanced mathematical methods for scientists and engineers. McGraw-Hill Book Company (1978).
- Brown, T., et al. "Inferring the sun's internal angular velocity from observed p-mode frequency splittings", *ApJ*, 343: 526-546 (1989).
- Brun, A. S., et al. "Standard solar models in the light of new helioseismic constraints. I. The solar core", *ApJ*, 506: 913-925 (1998).
- Brun, A. S., et al. "Standard solar models in the light of new helioseismic constraints. II. Mixing below the convective zone", *ApJ*, 525: 1032-1041 (1999).
- Bursa, M. "The Sun's flattening and its influence on planetary orbits", *Bull. Astron. Inst.*, 37: 312-313 (1986).
- Campbell, L., et al. "The Sun's quadrupole moment and perihelion precession of Mercury", *Nature*, 305: 508-510 (1983).
- Choudhuri, A. R. The physics of fluids and plasmas. An introduction for astrophysicists. Cambridge University Press (1998).
- Corbard, T. "Inversion des mesures héliosismiques : La rotation interne du soleil", PhD dissertation, Université de Nice-Sophia Antipolis, Observatoire de la Côte d'Azur, November 1998.
- Corbard, T. and M. J. Thomson. "The subsurface radial gradient of solar angular velocity from MDI f-mode observations", *Solar Physics* 205: 211-229 (2001).
- Corbard, T., et al. "Effect of the subsurface radial differential rotation on flux-transport Solar dynamos", Proceedings of the SOHO 11 Symposium on From Solar Min to Max: Half a Solar Cycle with SOHO, 11-15 March 2002, Davos, Switzerland.
- Deslandes, H. "Mémoire de DEA", 1993.
- Dicke, R. H. and H. M. Goldenberg. "Solar oblateness and general relativity", *Phys. Rev. Lett.*, 18(9): 313-316 (1967).

- Dicke, R. H. and H. M. Goldenberg. "The oblateness of the Sun", *ApJ Suppl.*, 27: 131-182 (1974).
- Dicke, R. H. et al. "Oblateness of the Sun in 1983 and relativity", *Nature*, 316: 687-690 (1985).
- Dicke, R. H. et al. "The variable oblateness of the Sun: Mesurements of 1983", *ApJ*, 311: 1025-1030 (1986).
- Dicke, R. H. et al. "Is the Solar oblateness variable ? Mesurements of 1985", *ApJ*, 318: 451-458 (1987).
- Dicke, R. H. and H. M. Goldenberg. "Differential rotation and the Solar oblateness", *Nature*, 214: 1294-1296 (1967).
- Dikpati, M. et al. "Flux-transport Solar dynamos with the near-surface radial shear". *ApJ*, 575: 41-45 (2002).
- Forestini, M. Principes fondamentaux de structure stellaire. Gordon and Breach Science Publishers (1999).
- Godier, S. and J. P. Rozelot. "A new outlook on the `Differential Theory' of the solar Quadrupole Moment and Oblateness". *Solar Physics*, 199: 217-229 (2001).
- Godier, S. and J. P. Rozelot. "The Solar oblateness and its relationship with the structure of the tachocline and the Sun's subsurface". *Astron. Astrophys.*, 355: 365-374 (2000).
- Godier, S. and J. P. Rozelot. "Quadrupole moment of the Sun. Gravitational and rotational potentials". *Astron. Astrophys.*, 350: 310-317 (1999).
- Goldreich, P. and G. Schubert. "A theoretical upper bound to the Solar oblateness", *ApJ*, 154: 1005-1010 (1968).
- Hill, H. A. and R. T. Stebbins. "The intrinsic visual oblateness of the Sun", *ApJ*, 200: 471-483 (1975).
- Kislik, M. D. "On the Solar oblateness", Sov. Astro. Lett., 9(5): 296-299 (1983).
- Kosovichev, A. G. "Seismic observation of Solar Tachocline", Sounding *Solar and Stellar interiors*, edited by J. Provost and F. X. Schmider. 97-98. Nice France: IAU, Kluwer Academic Publishers, September-October 1996. Symposium 185, Poster volume.
- Kosovichev, A. G. "Helioseismic contraints on the gradient of angular velocity at the base of the solar convection zone", *ApJ*, 469: 61-64 (1996).
- Khun, J. R., et al. "The Sun's shape and brightness", Nature, 392: 155-157 (1998).
- Laclare, F. "Mesures du diametre solaire à l'astrolabe", Astron. Astrophys., 125: 200-203 (1983).

- Laclare, F., et al. "Mesurements and variations of the solar diameter", *Solar Physics*, 166: 211-229 (1996).
- Laclare, F., et al. "Variations apparentes du rayon solaire observés à l'Observatoire de la Côte d'Azur – Astrolabe Solaire du site de Calern: 1975-1998", C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série II b: 1107-1114 (1999).
- Landgraaf, W. "An estimation of the oblateness of the Sun from the motion of Icarus", *Solar Physics*, 142: 403-406 (1992).
- Leister, J. H. and P. Benevides-Soares. "Solar diameter variations", C. R. Acad. Sci. Paris, 313 (SII): 399-404 (1990)
- Lieske, T. J. and G. W. Null. "Icarus and determination of astronomical constants", *The Astronomical Journal*, 74(2): 297-307 (1969).
- Lydon, T. J. and S. Sofia. "A measurement of the shape of the Solar disk : The Solar quadrupole moment, the Solar octopole moment and the advance of the perihelion of the planet Mercury", *Physical Review Letters*, 76(2): 177-179 (1996).
- Maier, E., et al. "Preliminary results of a balloon flight of the Solar Disk Sextant", *ApJ*, 389: 447-452 (1992).
- Mathews, J. and R. L. Walker. Mathematical methods of physics. The Benjamin/Cummings Publishing Company (1964).
- Morel, P., et al. "Updated Solar models", Astron. Astrophys., 327: 349-360 (1997).

Nesme-Ribes, E. and G. Thuillier. Histoire Solaire et climatique. Belin, 2000.

- Nöel, F. "Heliographic latitude dependence of the apparent Solar radius", *Astron. Astrophys.*, 343: 1001-1004 (1999).
- Nöel, F. "Variations of apparent Solar semi-diameter observed with Astrolabe of Santiago", *Astron. Astrophys.*, 325: 825-827 (1997).

Pap, J. et al. "On the relation between total irradiance and radius variations", *Astron. Astrophys.*,372: 1005-1018 (2001)

Pascoli, G. Astronomie fondamentale. Astronomie de position et mécanique celeste. Dunod, Paris (2000).

Paterno, L., et al. "The rotation of the Sun's core", Astron. Astrophys., 314: 940-946 (1996).

- Pijpers, F. P. "Helioseismic determination of the Solar graviationnel quadrupole moment", *MNRAS*, 297: 76-80 (1998).
- Rösch, J., et al. "A new estimate of the quadrupole moment of the Sun", *Solar Physics*, 165: 1-11 (1996).

Rösch, J. and R. Yerle. "Solar diameters", Solar Physics, 82: 139-150 (1983).

- Rösch, J. and R. Yerle. "The scanning heliometer", *Proceedings of the Fourth European Meeting on Solar Physics, "The hydrodynamics of the Sun".* 217-218. ESA SP-220, 1984.
- Roxburgh, I. W. "Gravitational multipole moments of the Sun determined from helioseismic estimates of the internal structure and rotation", *Astron. Astrophys.*, 377: 688-690 (2001).
- Roxburgh, I. W. "Solar rotation and the perihelion advance of the planets", *Icarus.*, 3: 92 (1964).
- Roxburgh, I. W. "On stellar rotation, I. The rotation of upper main-sequence stars", *MNRAS*, 128: 157 (1964).
- Rozelot, J. P. and E. Bois. "New results concerning the solar oblateness". Synoptic Solar Physics, edited by K. S. Balasubramaniam, et al. 75. New Mexico USA : ASP Conference Series, September 1998. 18<sup>th</sup> NSO / Sacramento Peak Summer Workshop, Volume 140.
- Rozelot, J. P., et al. "On the theory of the Solar oblateness", *Solar Physics*, 198: 223-240 (2001).
- Rozelot, J. P. and J. Rösch. "An upper bound to the solar oblateness". May 1996. 8<sup>th</sup> European Meeting.
- Spiegel, E. A. and J. P. Zahn. "The solar tachocline", Astron. Astrophys., 265: 106-114 (1992).
- Tassoul, J. L. Theory of rotating stars. Princeton University Press (1978).
- Ulrich, R. K. and G. W. Hawkins. "Erratum The Solar Gravitational figure J<sub>2</sub> et J<sub>4</sub>". *ApJ*, 249: 831(1981).
- Ulrich, R. K. and G. W. Hawkins. "The Solar Gravitational figure J<sub>2</sub> et J<sub>4</sub>". *ApJ*, 246: 985-988 (1981).
- Vigouroux, A. Etude de la variabilité Solaire à long terme. PhD dissertation, Université de Nice Sophia Antipolis, Observatoire de la Côte d'Azur, Septembre 1996.

## Résumé

Afin d'apporter une nouvelle contribution à l'étude théorique des déformations subi par la surface du soleil à cause de sa rotation, les paramètres qui définissent la forme du soleil, les moments gravitationnels et l'aplatissement, ont été déterminés et ceci en utilisant un nouveau modèle analytique décrivant la rotation différentielle du Soleil (Corbard et al. (2002)) qui prend en compte la présence d'un gradient radial de rotation près de la surface déterminé à partir de nouvelles données observationnelles de l'héliosismologie (Corbard et Thomson (2001)). La détermination précise des ces paramètres de forme permet de calculer l'aplatissement du soleil et de voir les variations latitudinales du diamètre solaire qu'il induit pour ensuite les comparer à celles détectées par l'observation. Ces paramètres permettent aussi de déterminer de manière très précise les orbites des corps célestes proches du Soleil et en particulier la contribution du moment gravitationnel quadrupolaire à l'avance du périhélie de Mercure.

La détermination théorique des paramètres de forme du soleil nécessite la résolution d'un problème de deux valeurs aux limites au centre et à la surface du soleil, ce qui se résume en la résolution numérique d'une équation différentielle qui résulte de la combinaison de l'équation de l'équilibre hydrostatique du soleil et de l'équation de poisson de son potentiel gravitationnel. Pour cela, et vu que la rotation du soleil est considérée comme lente, des techniques de perturbation ont été utilisées pour traiter les effets de la rotation comme de petites perturbations superposées à un modèle solaire sphérique connu. Du fait que c'est la valeur en surface de la perturbation du potentiel gravitationnel qui nous donne la valeur du moment gravitationnel correspondant à l'ordre des perturbations étudié, ce modèle solaire sphérique, qui est un modèle de densité et de masse, est choisi de sorte qu'il soit bien calibré en surface de façon à calculer les paramètres de forme d'une manière correcte. En outre l'utilisation de plusieurs modèles de rotation prenant en compte la rotation différentielle dans la zone convective avec notamment la présence d'un gradient radial de rotation près de la surface, déterminé à partir de l'observation (l'héliosismologie), a permis de comparer les résultats entre eux ainsi qu'avec le cas d'une rotation uniforme (elle est prise égale à la vitesse de rotation uniforme de la zone radiative), et de ce fait voir l'influence de la rotation différentielle sur les valeurs des paramètres de forme. Afin de conforter les résultats obtenus deux méthodes fondamentalement différentes ont été utilisées pour la résolution de l'équation qui régit la structure du soleil : une méthode différentielle (méthode directe) et une méthode intégrale (méthode de Green). Dans cette thèse nous avons restreint nos développements à l'étude des moments gravitationnels quadrupolaire et octopolaire qui correspondent respectivement au premier et au second ordre des perturbations.

## Abstract

In order to give a new contribution to the theoretical study of the solar surface distortions induced by its differential rotation, the parameters which define the shape of the sun, the gravitational moments, were computed using a new analytical model of the solar differential rotation (Corbard et al. (2002)) which takes into account the presence of a subsurface radial gradient of rotation inferred and quantified by Corbard and Thomson (2001) from MDI *f*-modes observations. The precise determination of these parameters permits the calculation of the solar oblateness and the induced latitudinal variation of the solar diameter in order to compare them those detected from the observation. These parameters permit also the precise determination of the celestial orbits of bodies which are close to the Sun and in particularly the contribution of the quadrupole gravitational moment to the advance of Mercury's perihelion.

The theoretical determination of the shape parameter of the Sun requires the resolution of a two point boundary values problem at the centre and at the surface of the sun. It is summarized on a numerical resolution of a differential equation which results from the combination of the hydrostatic equilibrium equation of the sun and the Poisson's equation for its gravitational potential. Obviously, from the fact that the solar rotation is very slow, the departure from spherical symmetry is not large, we can than apply the perturbation techniques to treat the effects of the rotation as a small perturbation superimposed on a known spherical model.

Owing to the fact that it is the surface value of the gravitational potential perturbation which gives us the value of the gravitational moment corresponding to the studied order of the perturbation, this spherical solar model, which is a model of density and mass, is chosen very well calibrated in surface in order to calculate the shape parameters with precision.

Moreover the use of several models of rotation which take into account the differential rotation in the convective zone with particularly the presence a subsurface radial gradient of rotation, detected and quantified from the observation (heliosismology), made possible the comparison of the results and specially with the case of a uniform rotation (which is taken equal to the uniform rotation rate of the radiative zone), and thus to see the influence of the differential rotation on the values of the shape parameters.

In order to consolidate the obtained results, two basically different methods were used to resolve the differential equation which governs the structure of the sun: a differential method (direct method) and an integral method (Green method). In this thesis, we have restricted developments to study the quadrupole and octopole gravitational moments which correspond respectively to the first and the second order of the perturbations.