

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

————— 0 —————

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE



FACULTE DE PHYSIQUE

Département : Physique des Rayonnements

MEMOIRE DE MASTER

Domaine : Sciences de la matière
Filière : Physique
Spécialité : Physique des Rayonnements
Parcours : Astrophysique et technique spatial

Par :

REBIAI NOUREDDINE

————— Sujet : —————

ETUDE DES ONDES MAGNETO-ACOUSTIQUE DANS LE CAS D'UN CHAMP MAGNETIQUE INCLINE

Présenté le 20 Juin 2018, devant le jury composé de :

Mr. A.MIZAOUI	Professeur	USTHB	Président
Mr .T.ABEDLATIF	Directeur de Recherche	CRAAG	Rapporteur
Mr. K.DAIFALLAH	Maître de conférences 'A'	CRAAG	Examineur

Remerciement

J'exprime mes profonds remerciements à mon encadreur, Dr. Toufik ABDELATIF pour l'aide compétente qu'il m'a apporté, pour sa patience et son encouragement. Son œil critique m'a été très précieux pour structurer le travail et pour améliorer la qualité des différentes sections.

Mon vif remerciement va également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon mémoire en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Je tiens à remercier toute ma famille, mon père, ma mère, mes frères et mes sœurs ainsi tous mes amis et particulièrement les physiciens (AHMED, MOHAMED, YUCEF, THIZIRI, MAROIN AMINA, DYHIA, HADJER et NOURA).

Enfin à tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail, je leur dis merci

Table des matières

Table des matières	1
Introduction	1
1 Les généralité sur le soleil	2
1.1 description du soleil	2
1.2 la structure du soleil	3
1.2.1 la zone interne	3
1.2.2 la zone externe	4
1.2.2.1 la photosphère : source du rayonnement solaire	4
1.2.2.2 la chromosphère	4
1.2.2.3 la couronne solaire	5
1.3 L'activité solaire	5
1.4 Les oscillations du soleil	6
1.4.1 Les oscillations en dehors des taches solaires :	6
1.4.2 Les oscillations dans les taches solaires :	7
1.4.2.1 Les oscillations de 5 minutes dans l'ombre :	8
1.4.2.2 Les oscillation de 3 minutes dans l'ombre :	8
2 RAPPELS THÉORIQUES	9
2.1 Équations fondamentales de la MHD :	9
2.2 Équilibre magnéto-hydrostatique :	10
2.3 Établissement des équations d'ondes magnéto-atmosphérique :	11
2.3.1 Dérivation de l'équation d'ondes linéarisée :	13

3	Le modèle isotherme et stratifié	15
3.1	présentation du modèle	15
3.2	Résolution des Équations différentielles	17
3.2.1	Ondes Magnéto-Atmosphériques couplées :	17
3.2.2	Ondes magnéto-atmosphérique Slow et Fast découplées	21
3.2.3	Les modes d'Alfven	23
3.3	Discussion	24
4	O.M.A dans le cas d'un champ magnétique incliné	26
4.1	Equations des ondes magnéto-atmosphérique dans un champ magnétique incliné . . .	26
4.2	Equations des ondes magnéto-atmosphérique dans un champ magnétique incliné pour un $k_x = 0$	27
4.3	Equations où le champ magnétique est uniforme	27
4.4	La méthode perturbative	28
4.5	La linéarisation	28
4.6	Résolution des équations différentielles	29
4.7	Discussion	32
	Conclusion	33

Introduction

Depuis la découverte de la température de la couronne solaire plusieurs théories sur ce chauffage furent avancées entre autre la dissipation d'onde qui se propage de la photosphère à la couronne. Dans ce travail nous étudions les ondes magnéto-atmosphériques dans un champ magnétique incliné, dont le but est d'expliquer les modes de propagations des oscillations dans un champ magnétique incliné.

Nous présentons dans le premier chapitre une description général du soleil et sa structure du coeur jusqu'à la couronne, et nous abordons aussi l'activité solaire des taches solaires et leur distribution sur la la photosphère au cours de temps et par la suite nous présentons les différentes oscillations notamment les oscillations de 3 minutes et 5 minutes dans et en dehors des taches solaires , et on présente également les deux théories qui explique l'origine de ces oscillations, la théorie de la résonante photosphérique et la théorie de la résonante Chromosphérique.

L'étude de ces oscillations, nécessite l'élaboration des équations d'ondes dans tel milieu. Ces équations d'onde sont obtenues à partir des équation de base de la magnétohydrodynamique. Après avoir présenté les équations fondamentales de la MHD, le troisième chapitre sera consacré à la dérivation des équations linéarisées régissant la propagation des ondes dans un milieu tel que celui au niveau de l'ombre des taches solaires.

Nous présentons dans le troisième chapitre le modèle isotherme au niveau de l'atmosphère solaire (photosphère et chromosphère) où le champs magnétique est uniforme et vertical on considère que l'atmosphère solaire est semblable à une cavité résonante limitée en bas par la zone de convection et en haut par la couronne solaire à partir de ces supposition on va déduire les équations d'ondes magnéto-atmosphériques pour un champ magnétique uniforme et vertical . Nous résoudrons ces équations par la méthode de Frobenius dans les deux cas couplées et découplées, et déterminer les différents modes d'ondes (fast et slow) et les modes d'alfven qui propagent au niveau de l'atmosphère solaire et on discute les résultats .

Dans le quatrième chapitre on fait le même développement pour le chapitre précédent, nous résolvons les équations des ondes magnéto-atmosphériques dans le modèle isotherme où le champ magnétique est légèrement incliné d'un angle θ très petit dans le cas précis où le nombre d'onde est nul $k = 0$, par la méthode perturbatif en utilisant la linéarisation utilisé dans le deuxième chapitre pour simplifié les équation et pouvoir les résoudre, après l'obtention des équations différentielle linéarisées une solution théorique est trouvée par le logiciel mathematica, et on détermine les fréquences des modes propres pour $k = 0$ et pour différents angle θ petit .

Chapitre 1

Les généralité sur le soleil

1.1 description du soleil

Le soleil est une étoile ordinaire parmi les 300 milliards d'autre étoiles qui peuplent la voie lactée. il est situé à 28 000 années-lumières du coeur de notre galaxie, proche d'un bras de la spirale. la distance entre la terre et le soleil est 150 millions de kilomètres (1 unité astronomique,UA),

Issue d'un nuage de gaz interstellaire se contractant et s'échauffant sous l'effet de la gravitation jusqu'à l'apparition des réactions thermonucléaires, une proto-étoile a donné naissance au soleil et à l'ensemble du système solaire. Le soleil actuel dont l'énergie provient des réactions thermonucléaires, en transformant le noyau d'hydrogène en noyau d'hélium, est âgé de 4.57 milliards d'années, soit à peu près la moitié de son chemin sur la séquence principale du diagramme de Hertzsprung-Russell (1.1), et actuellement le soleil se trouve dans un état d'équilibre hydrostatique.

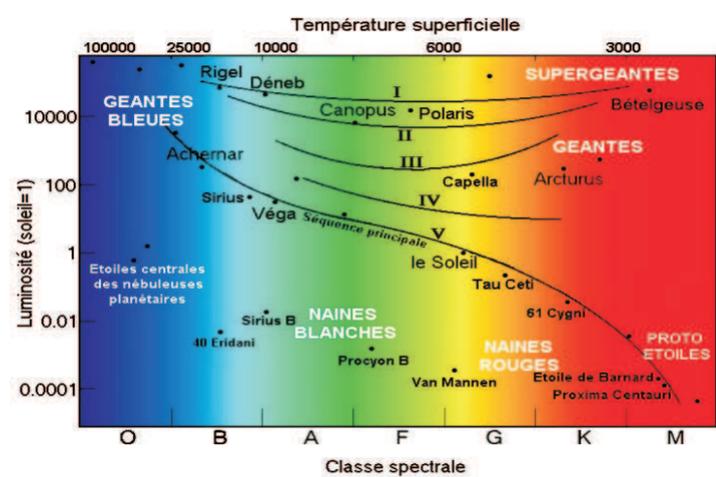


FIGURE 1.1 – diagramme HR

Lorsque le carburant central de l'étoile s'épuisera, le noyau s'effondrera sur lui-même tandis que les couche superficielles seront repoussée et le soleil deviendra une géante rouge dans cinq milliards

d'années environ après cela, les couches externes seront éjectées dans l'espace et donneront naissance à une nébuleuse planétaire. Les restes du cœur interne de l'étoile s'effondreront pour former une naine blanche très dense d'une taille comparable à la terre, qui pourra briller encore plusieurs milliards d'années au cours desquelles elle se refroidira lentement avant de s'éteindre définitivement, et devenir une naine noire figure (1.2)

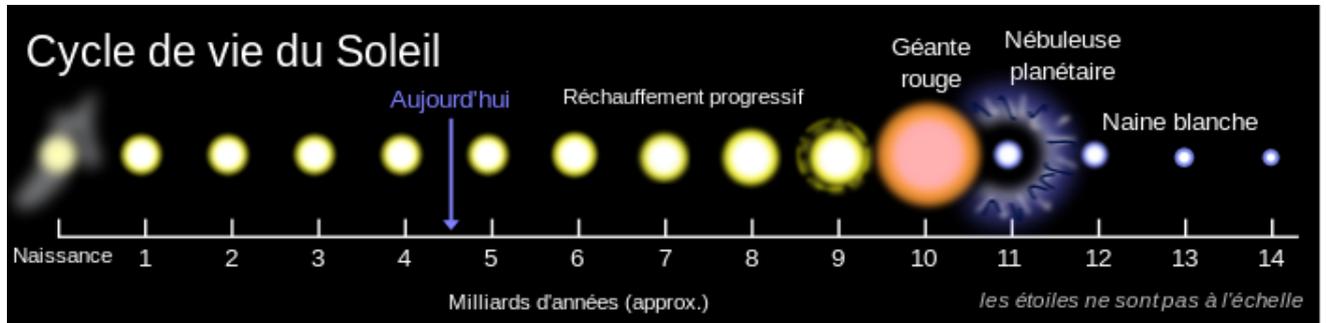


FIGURE 1.2 – cycle de vie de soleil

1.2 la structure du soleil

le soleil est un plasma dont la structure possède, en approximation, la symétrie sphérique. on distingue deux grandes régions :

1.2.1 la zone interne

Constitue de trois couches (cœur, zone radiative et convective).

Cette zone est inaccessible à l'observation optique directe. Elle est dominée par des températures et des pressions élevées. Dans une sphère de rayon $2 \cdot 10^5$ km se concentre 60 % de la masse totale du soleil. C'est dans cette région que se trouve le four solaire, source d'énergie de notre étoile, où se déroule la fusion thermonucléaire. L'hydrogène s'y transforme en hélium par fusion nucléaire suivant 2 cycles de réactions.

Le cycle proton-proton qui se traduit par fusion de 4 protons pour former un atome de hélium (particule α). ce cycle fournit 98% de l'énergie totale et produit de manière transitoire du bore, du béryllium et du lithium. le restant de l'énergie 2% est imputable au cycle de carbone qui passe par des étapes de productions de carbone et d'azote. C'est ainsi que chaque seconde $7 \cdot 10^{11}$ kg d'hydrogène se transforment en $6.957 \cdot 10^{11}$ kg d'hélium. la différence est libérée sous forme de radiations électromagnétique des photons, de neutrinos et pour une très faible partie d'énergie cinétique des protons alors que les neutrinos s'échappent du cœur du soleil, leur libre parcours moyen de collision étant égal à 7000 UA.

Le transfert vers l'extérieur de l'énergie des photons γ s'effectue à travers une région dite radiative (entre 0.3 et $0.7R_{\odot}$). Les photons sont émis et réabsorbés de nombreuses fois de cette zone avant

d'atteindre la surface de du soleil .durant ce processus, leur longueur d'onde augmente régulièrement jusqu'à atteindre le domaine visible a la surface au delà de cette distance, les processus de rayonnement ne suffisent plus et il se développe un gradient de température important de la matière (formulation de cellules de circulation dans un fluide chauffé par la base). Le gaz chaud monte, se refroidit en cédant son énergie aux couches superficielles de l'atmosphère solaire avant de redescendre .L'étude de cette zone et de ses modes propres a donnée naissance à une branche de l'astrophysique appelée Héliosismologie.

1.2.2 la zone externe

La zone externe est la partie visible (où les photons nous parviennent directement sans subir le processus d'absorption-réémission) du Soleil. On la subdivise en 3 couches.

1.2.2.1 la photosphère : source du rayonnement solaire

La photosphère est la surface visible du Soleil en lumière blanche d'où les photons s'échappent. Elle est la source de 90% du rayonnement total et s'étend sur une zone d'environ 500km d'épaisseur. Elle peut être assimilée approximativement à un corps noir de température 5780K . Cependant, cette photosphère est loin d'être uniforme, aussi bien dans l'espace que dans le temps. Elle présente une structure granulaire, qui représente les traces des cellules de convection se trouvant dans la zone en-dessous. A la traversée de cette zone, la température décroît rapidement passant de 5700K à environ 4200K. La surface de la photosphère est parsemé de taches qui sont la manifestation de l'activité solaire (voir section 1.3) et de champ magnétique généré dans la zone convective.

1.2.2.2 la chromosphère

La chromosphère épaisse de quelques milliers de kilomètres. C'est une région transparente au rayonnement issu de la photosphère, mais brillante par elle-même pour certaines raies du spectre (par exemple, la raie H α). Chose surprenante, elle se caractérise par une croissance de la température avec l'altitude comme illustrée par le schéma de la figure (1.3) . A sa base, la température est de l'ordre de 4200K. Vers 2000km, au sommet de la chromosphère, ils atteignent déjà 10 000K. Le chauffage est due à un transport d'énergie mécanique abondante dans la zone de convection le transport se fait ou par ondes qui se propages vers ces zones ou alors par le transport de l'hélicité du champ magnétique. Cette température passe brutalement de 10^4 à 10^5 K. Cette température continue d'augmenter pour atteindre plus d'un million de degrés à environ 15 000km. A cette température, le fer est un excellent traceur de cette zone et permet d'observer comment le champ magnétique ordonne la matière. L'énergie responsable du chauffage de la base de la couronne solaire est transportée par des ondes engendrées dans les couches plus profondes, c'est-à-dire dans les régions de convection turbulente situées juste en-dessous de la photosphère.

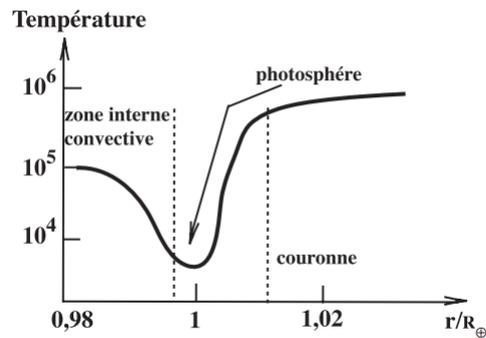


FIGURE 1.3 – structure thermique de soleil

1.2.2.3 la couronne solaire

Au-delà de la chromosphère se trouve la couronne solaire, région peu dense et dont la partie optiquement observable lors des éclipses s'étend sur une distance de l'ordre de 2 rayons solaires. L'émission de cette région est beaucoup plus faible que celle de la chromosphère et correspond à la diffusion de la lumière photosphérique. Les observations faites par SOHO ont montré que l'intérieur de cette zone est très turbulente, impliquant une grande complexité sur la structure fine des températures. Les zones émissives, plus denses, sont appelées plateaux coronaux, par opposition aux zones moins denses et moins émissives, dites trous coronaux. Les principaux trous coronaux sont localisés aux pôles. Leur champ magnétique est très largement ouvert vers l'espace, constituant les portes de sortie du vent solaire dit rapide. On y observe également des arcades brillantes qui sont interprétées comme des boucles magnétiques fermées dans lesquelles s'accumulent plasmas chauds. Comme il a déjà été souligné, cette couronne se prolonge bien au-delà de quelques rayons solaires et forme ce que l'on nomme l'héliosphère.

1.3 L'activité solaire

L'activité solaire se manifeste principalement par l'apparition de "taches" (sunspots), connues depuis l'Antiquité, et distribuées de façon irrégulière spatialement et pas constante au cours du temps. On observe en moyenne la présence d'un grand nombre de centres actifs durant des périodes se répétant tous les onze ans. La montée de chaque cycle, qui dure quatre ans et demi est nettement plus rapide que sa descente (six ans et demi). La périodicité est en réalité de vingt-deux ans : l'ordre des polarités des taches appartenant à un groupe bipolaire, qui reste identique pour chaque hémisphère (nord ou sud) du soleil pendant onze ans, et s'inverse au cycle suivant (le diagramme papillon). L'étude de la position des taches indique par ailleurs que la latitude d'apparition des centres, de 30 degrés environ au début du cycle de onze ans, décroît ensuite et n'est en moyenne que de l'ordre de 10 degrés en fin de cycle. Simultanément, les taches liées au cycle suivant commencent à apparaître à plus haute latitude.

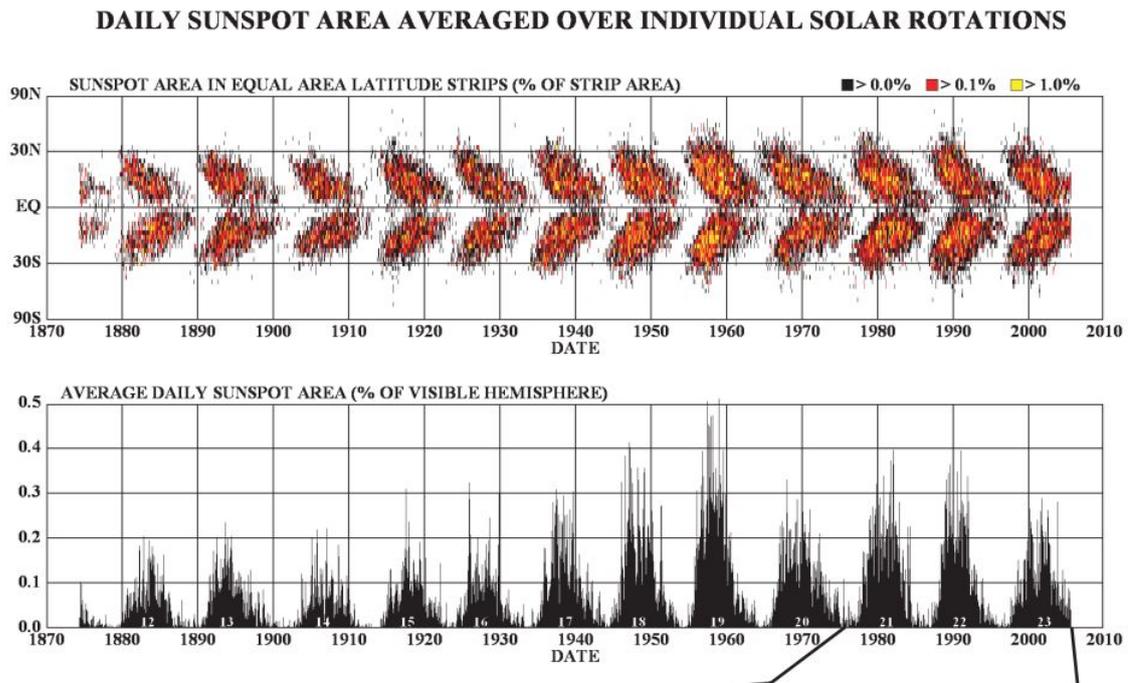


FIGURE 1.4 – Diagramme “butterfly” obtenu en compilant les informations concernant les taches solaires obtenues depuis 1874 par l’observatoire Royal de Greenwich. Un effet zoom montre l’amplitude du champ magnétique moyen observé durant la période 1975 → 2005 en corrélation avec les taches solaires.

L’activité solaire et le cycle sont liés à la régénération du champ magnétique à l’intérieur du soleil, dans une région probablement localisée à l’interface entre la zone de transport radiatif et celle de transport convectif, qui est la tachocline. Les courants électriques (l’intérieur du soleil est conducteur) y produisent un effet dynamo et oscillant avec une période de vingt-deux ans. Notons que la rotation différentielle est un ingrédient important de ce phénomène, car les lignes de champ magnétique sont tout d’abord droites, d’un pôle à l’autre, puis elles se déforment par la rotation différentielle.

1.4 Les oscillations du soleil

1.4.1 Les oscillations en dehors des taches solaires :

La première observation des oscillations sur la surface du soleil ont été faites en 1962 par (Leighton, Noyes et Simon, 1962, [1]). Ils ont observé des mouvements réguliers ont une période de 5 minutes et de faible amplitude.

Suite à ces observations de nombreux travaux théoriques essayent de donner une explication à ces oscillations. Les premiers travaux théoriques pour interpréter ces oscillations sont faits par (Ulrich, 1970, [2]) (Leibacher et Stein, 1971, [3]) et (Wolff, 1972, [4]). Ils ont montré que ces oscillations sont des ondes sonores piégées dans une cavité résonante située au-dessous de la photosphère.

Depuis 1962 jusqu’à nos jours on a identifié un très grand nombre de modes d’oscillation ce que l’on appelle les (p-modes). Ces oscillations sont la manifestation d’interférence constructive d’ondes

acoustique pénétrant plus ou moins profondément dans le soleil. L'observation de ces p-modes nous offre un moyen puissant pour étudier la structure interne du soleil ce domaine est l'Héliosismologie.

1.4.2 Les oscillations dans les taches solaires :

Dans les taches solaires il y a 3 types d'oscillations

1. Les oscillations de 5 minutes la réponse de l'ombre de la tache aux p-modes.
2. Les oscillations de 3 minutes propre à l'ombre de la tache solaire .
3. Les oscillations de la pénombre des oscillations se propagent vers l'extérieur de la tache.

L'observation de ces oscillations se fait par la mesure de décalage Doppler d'une raie spectrale entre le bleu et le rouge cette raie il faut qu'elle soit propre à l'ombre de la tache pour éliminer la contamination du signal par les émissions provenant des régions entourant la tache solaire.

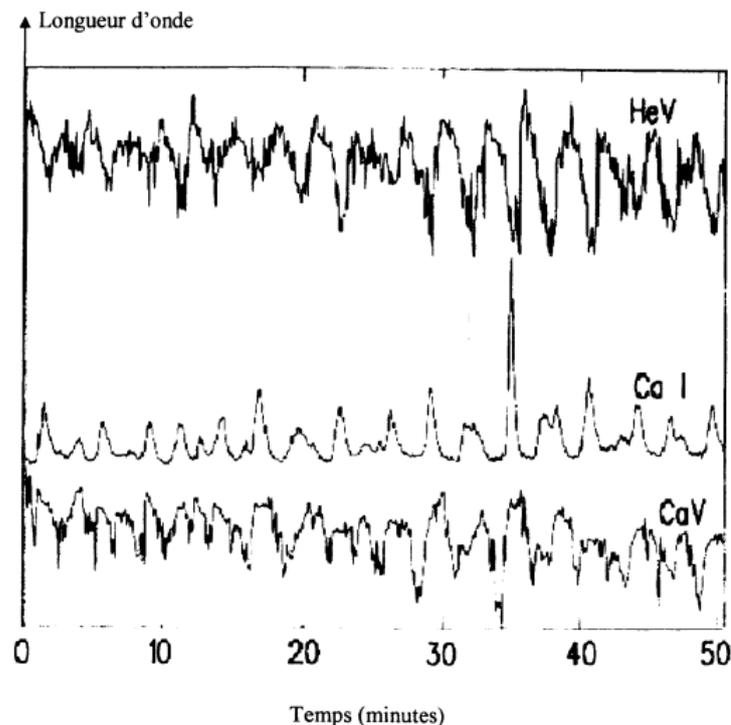


FIGURE 1.5 – La mesure simultanée du décalage par effet Doppler des raies spectrales Ca I, Ca V, He V. L'amplitude de décalage est normalisée pour permettre une comparaison de toutes les raies (Lites 1986,[5])

Le décalage par effet Doppler de différentes raies spectrales dans cette figure ont une période de 3 minutes. Ce déphasage entre les 3 raies est causé par les différentes altitudes d'où proviennent ces raies spectrales. Montre que les raies qui se forment en bas de l'atmosphère sont excitées avant que celles qui se forment en haut. Cela indique des oscillations se propageant vers le haut .

1.4.2.1 Les oscillations de 5 minutes dans l'ombre :

La première observation des oscillations de 5 minutes dans l'ombre des taches solaires a été faite par (Beckers & Schultz, en 1972,[6]) . Ils ont utilisé une raie spectrale d'un triplet Zeeman propre à la tache solaire. Avant cela on pensait que ces oscillations sont la contamination du signal des régions entourant les taches solaires. Par l'observation de la raie propre à la tache ils ont montré que ces oscillations sont propres à la tache

L'interprétation de l'existence des oscillations de 5 minutes dans l'ombre est que la tache solaire agit comme un filtre qui ne permet que la transmission sélective des p-modes à l'intérieur (Abdelatif,1985,[7]) . Les ondes sont transmises sous forme d'onde magnéto-atmosphérique avec la même fréquence que les ondes acoustiques qui les ont causées mais des nombres d'ondes différents (Abdelatif,1986, [8]) (Abdelatif,1985,[7]) ça montre que la vitesse de propagation de ces ondes est plus grande à l'intérieur de l'ombre qu'à l'extérieur (Abdelatif,1987,[9]) .

1.4.2.2 Les oscillations de 3 minutes dans l'ombre :

L'observation de plusieurs raies spectrales montre l'existence des oscillations de 3 minutes dans l'ombre des taches solaires. L'amplitude de ces oscillations varie de quelque mètre par seconde à 10km/s dans la haute atmosphère jusqu'à la couronne.

Les oscillations de 3 minutes dans l'ombre des taches solaires, sont attribuées à des modes résonnants d'ondes magnéto-atmosphériques (Scheuer,1981,[10])

Il existe deux théories qui expliquent les oscillations de 3 minutes :

La théorie de la résonance photosphérique : (Uchida,Sakurai,1975,[11],Scheuer,Thomas,1981,[10]et Thomas, Scheuer,1982,[12]) considère que les oscillations de 3 minutes sont attribuées à des modes fast résonnants d'ondes magnéto-atmosphériques piégées dans la sub-photosphère de l'ombre ces oscillations sont excitées par les cellules de convection provenant de la zone de convection .

La théorie de la résonance Chromosphérique : (Zhugzhda, Locans,Staude,1983,[13]et Zhugzhda, Locans,Staude,1984,[14]) considère que les oscillations de 3 minutes sont attribuées à des modes slow résonnants d'ondes magnéto-atmosphériques piégées au niveau de la chromosphère le piégeage des ondes se fait par la réflexion vers le bas due à l'augmentation rapide de la température et par conséquent de la vitesse de son .

Chapitre 2

RAPPELS THÉORIQUES

L'étude des oscillations de soleil dans les taches solaires, nécessite l'élaboration des équations d'ondes dans tel milieu. Ces équations d'onde sont obtenues a partir des équation de base de la magnétohydrodynamique.

après avoir présenté les équations fondamentales de la MHD. Ce chapitre sera consacré à la dérivation des équations linéarisées régissant la propagation des ondes dans un milieu tel que celui au niveau de l'ombre des taches solaires. Dans ce cas, ces ondes sont appelées : ondes magéto-atmosphériques.

2.1 Équations fondamentales de la MHD :

Les phénomènes régis par la magnétohydrodynamique sont décrits par un système d'équations couplées formées à partir des équations de Navier-Stokes et des équations de Maxwell

considérons un milieu non visqueux, parfaitement conducteur, où règne un champ magnétique \vec{B} , et le champ de gravité \vec{g} . Dans ce cas les équations de la M.H.D s'écrivent :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.1)$$

Equation de mouvement :

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \right] \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}. \quad (2.2)$$

Equation de l'énergie

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p = \frac{\gamma p}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho \right). \quad (2.3)$$

Equation d'état des gaz parfaits

$$p = \rho R T. \quad (2.4)$$

Conservation de flux magnétique

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.5)$$

Equation d'induction

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.6)$$

Où ρ, p, T et \vec{v} , sont respectivement, la densité, la pression, la température et la vitesse du fluide. R est la constante des gaz parfaits. Et γ est le rapport des chaleur spécifiques. Les détails de dérivation de ces équations peuvent être retrouvés dans les ouvrage de base de la M.H.D, tel que : (Cowling, 1976, [15]).

2.2 Équilibre magnéto-hydrostatique :

Dans la photosphère solaire, on observe certaines structures telles que les prominences et les taches solaires qui ont un temps de vie relativement élevé (jusqu'à quelques jours). Cet équilibre est réalisé entre les différentes forces qui rentre en jeu et permet de maintenir ces structures dans un état d'équilibre relatif.

Ainsi les équation de la magnéto-hydrostatique sont déduites à partir de celles de la magnétohydrodynamique en assignant une valeur nulle à la vitesse. On aura ;

Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0. \quad (2.7)$$

Equation de mouvement

$$-\vec{\nabla} p_0 + \rho_0 \cdot \vec{g} + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_0 = \vec{0}. \quad (2.8)$$

Conservation de l'énergie

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = \frac{p_0 \gamma}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t} \right). \quad (2.9)$$

Equation d'état des gaz parfaits :

$$p_0 = \rho_0 R T_0. \quad (2.10)$$

Conservation du flux magnétique

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = 0. \quad (2.11)$$

Equation d'induction

$$\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = \vec{0}. \quad (2.12)$$

L'indice « 0 » correspond des grandeurs dans l'état d'équilibre.

ρ_0, p, T_0 et B_0 sont indépendants de temps

A partir de l'équation de continuité, on déduit que la masse volumique à l'équilibre est indépendante du temps. On remarque aussi qu'à partir de l'équation de conservation de l'énergie, on déduit que la pression est aussi indépendante du temps. De même l'équation d'induction indique que le champ magnétique est indépendant du temps.

2.3 Établissement des équations d'ondes magnéto-atmosphérique :

Considérons une atmosphère non visqueuse, avec une conductivité électrique infinie. Ce milieu est sous l'action d'un champ magnétique \vec{B}_0 et du champ de pesanteur \vec{g} .

Si à partir d'un état d'équilibre on effectue une petite perturbation adiabatique. Celle-ci se propagera dans l'atmosphère sous forme d'onde magnéto-atmosphérique.

Les grandeurs caractéristiques du milieu peuvent être écrites sous la forme :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1(r, t). \quad (2.13)$$

$$\vec{v} = \vec{0} + \vec{v}_1. \quad (2.14)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(r, t). \quad (2.15)$$

$$p = p_0 + p_1(r, t). \quad (2.16)$$

L'indice (1) est réservé aux perturbations, qui sont petites devant les quantités à l'état d'équilibre (indiquées par l'indice « 0 »).

Il reste à substituer ces grandeurs perturbées dans les équations de la M.H.D. En négligeant le produit des termes représentant les perturbations non linéaire, et en exploitant les équations de la magnéto-hydrodynamique, on aura :

a) Pour l'équation de continuité de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho) = 0. \quad (2.17)$$

on a :

$$\frac{\partial (\rho_0 + \rho_1(r, t))}{\partial t} + \vec{\nabla}((\rho_0 + \rho_1(r, t)) \cdot \vec{v}(r, t)) = 0. \quad (2.18)$$

Sachant que : $\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$.

$$\implies \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho_0 \cdot \vec{v}_1) = 0. \quad (2.19)$$

b) Pour l'équation de mouvement :

On substitue (2.13) (2.14) (2.15) (2.16) dans l'équation (2.2)

On obtient :

$$(\rho_0 + \rho_1) \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \right] \vec{v}_1 = -\vec{\nabla}(p_0 + p_1) + (\rho_0 + \rho_1) \cdot \vec{g} + \frac{1}{\mu} \left((\vec{\nabla} \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_1)) \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_1) \right), \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \implies \rho_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \right] \vec{v}_1 &= -\vec{\nabla}p_0 - \vec{\nabla}p_1 + (\rho_0 + \rho_1) \cdot \vec{g} + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_0 \\ &+ \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1 + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_1, \end{aligned} \quad (2.21)$$

Sachant que le fluide a l'état d'équilibre satisfait l'équation :

$$-\vec{\nabla}p_0 + \rho_0 \cdot \vec{g} + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_0 = \vec{0}, \quad (2.22)$$

$$\implies \rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla}p_1 + \rho_1 \cdot \vec{g} + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1, \quad (2.23)$$

c) Pour l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p = \frac{\gamma p}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho \right), \quad (2.24)$$

$$\implies \frac{\partial (p_0 + p_1)}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} \cdot (p_0 + p_1) = \frac{\gamma (p_0 + p_1)}{(\rho_0 + \rho_1)} \left(\frac{\partial (\rho_0 + \rho_1)}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} (\rho_0 + \rho_1) \right), \quad (2.25)$$

$$\implies \left[\frac{\partial p_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} \cdot p_0 \right] (\rho_0 + \rho_1) = \gamma (p_0 + p_1) \left[\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} \rho_0 \right], \quad (2.26)$$

$$\implies \left[\frac{\partial p_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} \cdot p_0 \right] = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \left[\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} \rho_0 \right], \quad (2.27)$$

d) Pour l'équation d'indiction :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}), \quad (2.28)$$

$$\implies \frac{\partial (\vec{B}_0 + \vec{B}_1)}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v}_1 \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_1)), \quad (2.29)$$

$$\implies \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0), \quad (2.30)$$

e) Pour l'équation de conservation du flux de \vec{B}

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{B}_0 + \vec{B}_1) = 0, \quad (2.31)$$

$$\implies \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1 = 0, \quad (2.32)$$

puisque $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = 0$ à l'équilibre

2.3.1 Dérivation de l'équation d'ondes linéarisée :

On dérive l'équation (2.23) par rapport au temps sachant que les grandeurs à l'équilibre ne dépendent pas du temps.

On trouve

$$\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{v}_1 = -\vec{\nabla} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \cdot \vec{g} + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}) \times \vec{B}_0 + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) \times \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}, \quad (2.33)$$

Et on substitue les valeurs de $\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$, $\frac{\partial p_1}{\partial t}$ et $\frac{\partial \rho_1}{\partial t}$ des équations (2.19), (2.27) et (2.30) dans (2.33) avec $c^2 = \gamma RT$

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{v}_1 = & -\vec{\nabla} \left[c^2 \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \vec{\nabla} p_0 \right) - \vec{v}_1 \vec{\nabla} p_0 \right] - (\vec{\nabla} (\rho_0 \vec{v}_1)) \cdot \vec{g} + \\ & \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0))) \times \vec{B}_0 + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) \times (\vec{\nabla} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)), \end{aligned} \quad (2.34)$$

On calcule le terme $-\vec{\nabla}(-\vec{v}_1 \vec{\nabla} p_0)$

On a à l'équilibre

$$\vec{\nabla} p_0 = \rho_0 \cdot \vec{g} + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_0, \quad (2.35)$$

$$\implies -\vec{\nabla} (-\vec{v}_1 \vec{\nabla} p_0) = \vec{\nabla} \left[\vec{v}_1 \left(\frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_0 \right) \right] + \vec{\nabla} [\vec{v}_1 \rho_0 \vec{g}], \quad (2.36)$$

$$\implies -\vec{\nabla} (-\vec{v}_1 \vec{\nabla} p_0) = \vec{\nabla} \left[\vec{v}_1 \left(\frac{1}{\mu} \vec{B}_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0) - \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0^2 \right) \right] + \rho_0 \vec{\nabla} (\vec{v}_1 \vec{g}) + \vec{v}_1 \vec{g} \vec{\nabla} (\rho_0), \quad (2.37)$$

Alors on remplace ce détail dans l'équation (2.34) on trouve :

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{v}_1 = & -\vec{\nabla} \left[c^2 \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \vec{\nabla} p_0 \right) \right] + \vec{\nabla} \left[\frac{\vec{v}_1}{\mu} (\vec{B}_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0) - \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0^2) \right] \\ & + \rho_0 \vec{\nabla} (\vec{v}_1 \vec{g}) + \vec{v}_1 \vec{g} \vec{\nabla} (\rho_0) - \rho_0 \vec{g} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1) - \vec{g} \vec{v}_1 \vec{\nabla} \rho_0 \\ & + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0))) \times \vec{B}_0 + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) \times (\vec{\nabla} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)) \end{aligned}, \quad (2.38)$$

en utilisant (2.19)

$$\begin{aligned}
 \implies \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{v}_1 = & \vec{\nabla} [c^2 \rho_0 \vec{\nabla} \vec{v}_1] + \vec{\nabla} \left[\frac{v_1}{\mu} (\vec{B}_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0) - \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0^2) \right] \\
 & + \rho_0 \vec{\nabla} (\vec{v}_1 \vec{g}) - \rho_0 \vec{g} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1) + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0))) \times \vec{B}_0, \quad (2.39) \\
 & + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) \times (\vec{\nabla} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0))
 \end{aligned}$$

Cette équation d'onde linéarisée (2.39) est l'équation de base qui sert à la majorité des études sur les ondes magnéto-atmosphériques. Pour obtenir cette équation on a supposé que on est dans un état d'équilibre statique.

Et on suppose aussi que le champ magnétique \vec{B}_0 est constant et uniforme l'équation (2.39) devient [7] :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{v}_1 = \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} (\rho_0 c^2 \vec{\nabla} \vec{v}_1) + \vec{\nabla} (\vec{v}_1 \vec{g}) - \vec{g} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1) + V_A^2 [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times (\vec{v}_1 \times \vec{b}_0))] \times \vec{b}_0, \quad (2.40)$$

où $V_A^2 = \frac{B_0^2}{\mu \rho_0}$ avec $\mu = 4\pi$, $\vec{b}_0 = \frac{\vec{B}_0}{|\vec{B}_0|}$: qui est le vecteur unitaire dans la direction de \vec{B}_0

Alors l'équation (2.40) est une équation d'ondes linéarisé où le champ magnétique est uniforme suivant la direction z

Chapitre 3

Le modèle isotherme et stratifié

Dans ce chapitre on présentera le modèle isotherme au niveau de l'atmosphère solaire dans le quel on va déduire les équations d'ondes magnéto-atmosphériques pour un champ magnétique uniforme et vertical. On résoudra ces équations par la méthode de Frobenius dans les deux cas couplées et découplées, et on va présenter les différents modes d'ondes (fast et slow) qui se propages au niveau de l'atmosphère solaire et par la suite on essayera de discuter les résultat .

3.1 présentation du modèle

Dans ce modèle on considère que l'atmosphère solaire est isotherme et horizontalement stratifiée dans un champ de gravité uniforme suivant « z » sous la forme $\vec{g}=(0,0,-g)$ et le champs magnétique uniforme suivant « z » $\vec{B}_0= (0,0,B_0)$ constant. on considère que le plasma est un gaz parfait de conductivité électrique infinie et une viscosité nulle (plasma idéal) (Abdelatif,1990,[16]).

Ce modèle est loin de la réalité car dans l'atmosphère solaire au niveau de la photosphère et la chromosphère la température ne pas constante, et le champs magnétique \vec{B} n'est pas uniforme. Il est impossible de construire un modèle qui décrit la réalité de l'atmosphère solaire, mais ces supposition sont indispensable pour la compréhension de la physique qui est derrière par contre la résolution de l'équation général sans des supposition et simplification par les simulation numérique ça va pas nous permettre de maitriser toute les paramètres mis en jeu.

les cellules de convection de la zone de convection sont considérées comme le mécanisme excitateur de ces ondes magnéto-atmosphérique.

Pour établir les conditions au limites à $z = 0$ et $z = L$ on va faire les approximations suivantes :

- A cause de la densité et la température très élevé au niveau de la zone de convection on la considère comme une couche rigide et parfaitement réfléchissante.
- Et a cause de l'augmentation importante de la température au niveau de la couronne solaire elle réfléchie fortement les ondes magnéto-atmosphérique .

A cause de ces deux approximation on peut supposer que notre atmosphère est considérée comme une cavité résonante limité en bas par la zone de convection et en haut par la couronne (3.1), par ces approximation on peut supposer que les vitesses soient nulles à $z = 0$ et à $z = L$ (Abdelatif,1990,[16]).

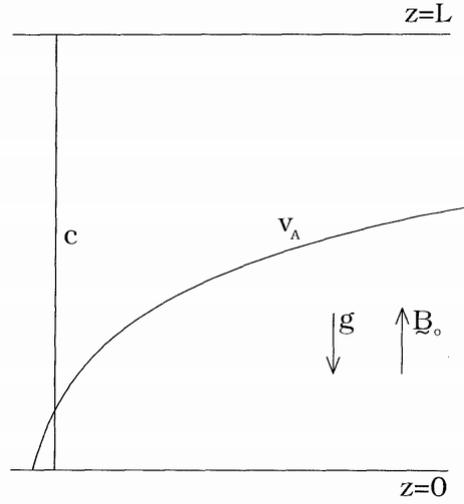


FIGURE 3.1 – Schéma descriptif d'une atmosphère isotherme et stratifiée dans laquelle règne un champ magnétique vertical uniforme (Abdelatif,1990,[16])

La perturbation de la vitesse peut être représentée sous la forme de

$$\vec{v}_1(x, y, z) = [v_x, v_y, v_z] = \vec{u}(z) \exp(i(-\omega t + K_x x)), \quad (3.1)$$

Où K_x est le vecteur d'onde dans la direction perpendiculaire à Oz donc à partir de (2.40).

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{v}_1 = \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} (\rho_0 c^2 \vec{\nabla} \vec{v}_1) + \vec{\nabla} (\vec{v}_1 \vec{g}) - \vec{g} (\vec{\nabla} \vec{v}_1) + V_A^2 [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times (\vec{v}_1 \times \vec{b}_0))] \times \vec{b}_0, \quad (3.2)$$

On remplace \vec{v}_1 par \vec{v} pour la simplification .

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{v} = \frac{1}{\rho_0} \rho_0 \vec{\nabla} (c^2 \vec{\nabla} \vec{v}) + \frac{1}{\rho_0} (c^2 \vec{\nabla} \vec{v}) \vec{\nabla} (\rho_0) + \vec{\nabla} (\vec{v} \vec{g}) - \vec{g} (\vec{\nabla} \vec{v}) + V_A^2 [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{b}_0))] \times \vec{b}_0, \quad (3.3)$$

Atmosphère isotherme

$$\rho_0 = \rho_{00} \exp\left(\frac{-z}{RT} g\right), \quad (3.4)$$

ρ_{00} : la valeur de la densité à $z = 0$.

$$\implies \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{v} = \vec{\nabla} (c^2 \vec{\nabla} \vec{v}) - \frac{\rho_0 \gamma g}{\rho_0} (\vec{\nabla} \vec{v}) \vec{e}_z + \vec{\nabla} (\vec{v} \vec{g}) - \vec{g} (\vec{\nabla} \vec{v}) + V_A^2 [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{b}_0))] \times \vec{b}_0, \quad (3.5)$$

Avec $\gamma = \frac{c^2}{RT}$

$$\implies \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{v} = \vec{\nabla} (c^2 \vec{\nabla} \vec{v}) - \gamma g (\vec{\nabla} \vec{v}) \vec{e}_z + \vec{\nabla} (-v_z g) - g (\vec{\nabla} \vec{v}) \vec{e}_z + V_A^2 [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{b}_0))] \times \vec{b}_0, \quad (3.6)$$

$$\implies \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{v} = \vec{\nabla} (c^2 \vec{\nabla} \vec{v} - v_z g) - g (\gamma - 1) (\vec{\nabla} \vec{v}) \vec{e}_z + V_A^2 \left[\left(-K_x^2 v_x + \frac{d^2 v_z}{dz^2} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{d^2 v_y}{dz^2} \right) \vec{e}_y \right], \quad (3.7)$$

\vec{e}_x : le vecteur unitaire suivant l'axe OX.

\vec{e}_y : le vecteur unitaire suivant l'axe OY.

\vec{e}_z : le vecteur unitaire suivant l'axe OZ.

Alors on a obtenu une équation différentielle vectorielle que on peut la projeté suivant les trois coordonnées cartésienne OX ,OY ,OZ. Elle donne trois équation différentielles sont :

$$\left(\omega^2 - (c^2 + V_A^2) K_x^2 + V_A^2 \frac{d^2}{dz^2} \right) u_x + iK_x \left(-g + c^2 \frac{d}{dz} \right) u_z = 0, \quad (3.8)$$

$$\left(\omega^2 + V_A^2 \frac{d^2}{dz^2} \right) u_y = 0, \quad (3.9)$$

$$\left(c^2 \frac{d^2}{dz^2} - \gamma g \frac{d}{dz} + \omega^2 \right) u_z + iK_x \left(c^2 \frac{d}{dz} - (\gamma - 1) g \right) u_x, \quad (3.10)$$

A partir de ces équations on peut constater que la deuxième équation (3.9) est découplé des autres elle décrit l'équation d'Alfven

tandis que les équations (3.8) (3.10) sont couplée elles décrivent les autres ondes magnéto-atmosphérique fast et slow .

3.2 Résolution des Équations différentielles

3.2.1 Ondes Magnéto-Atmosphériques couplées :

On va résoudre les équation différentielles (3.8) (3.10) couplée en appliquant le modèle isotherme .

On a la vitesse d'alfven varié avec l'altitude $V_A^2 = \frac{B_0^2}{\mu\rho_0}$ donc il faut faire un changement de variable on utilisant des variable sans dimension (Leroy, Schwartz 1982,[17])

$$\xi = \frac{2\omega H}{V_A} = \frac{2\Omega}{\beta} \exp\left(\frac{-z}{2H}\right), \quad (3.11)$$

Afin d'obtenir des équations adimensionnelles on introduit aussi les paramètres suivants :

$K = K_x H$: le vecteur d'onde adimensionnel

$\Omega = \frac{\omega H}{c}$: pulsation adimensionnelle

ce qui donne : $\xi = \frac{2\Omega}{\beta} \exp\left(\frac{-z}{2H}\right)$ avec : $\beta = \frac{V_A}{c}$ à l'origine ($z = 0$)

Après le changement des variables les deux équations (3.8) (3.10) deviennent .

$$\left((\Omega^2 - K^2)\xi^2 - 4\Omega^2 K^2 + \Omega^2 \xi \frac{d}{d\xi} + \Omega^2 \xi^2 \frac{d}{d\xi^2} \right) u_x + iK \left(\frac{\xi^2}{\gamma} + \frac{\xi^3}{2} \frac{d}{d\xi} \right) u_z = 0, \quad (3.12)$$

$$\left(\Omega^2 + \frac{3}{4}\xi \frac{d}{d\xi} + \frac{1}{4}\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \right) u_z + iK \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} + \frac{\xi}{2} \frac{d}{d\xi} \right) u_x = 0, \quad (3.13)$$

En éliminant u_z de ces deux équations et on les combine dans une seule équation on trouve :

$$\begin{aligned} & [\xi^4 \frac{d^4}{d\xi^4} + 4\xi^3 \frac{d^3}{d\xi^3} + (1 + 4(\Omega^2 - K^2) + \xi^2) \xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \\ & \quad + (4(\Omega^2 + K^2) + 3\xi^2 - 1) \xi \frac{d}{d\xi} + \quad , \\ & 4 \left(\left(\Omega^2 + K^2 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma^2 \Omega^2} - 1 \right) \right) \xi^2 - 4\Omega^2 K^2 \right)] u_x = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Alors la il faut résoudre cette équation différentielle de u_x . pour cela on utilise la méthode de Frobenius des solution sous forme des séries .

La solution est :

$$u_x = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \xi^{n+\nu}, \quad (3.15)$$

On va dériver cette équation quatre fois par rapport ξ

$$u'_x = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \nu) X_n \xi^{n+\nu-1}, \quad (3.16)$$

$$u''_x = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \nu - 1) X_n \xi^{n+\nu-2}, \quad (3.17)$$

$$u'''_x = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \nu - 2) X_n \xi^{n+\nu-3}, \quad (3.18)$$

$$u''''_x = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \nu - 3) X_n \xi^{n+\nu-4}, \quad (3.19)$$

On remplace u_x et ses dérivés dans l'équation (3.14) et on mis les termes de même puissance de ξ ensemble (Leroy, Schwartz 1982,[17]) on trouve :

pour n paire on a

$$X_n = - \frac{(\nu + n)^2 - 2(\nu + n) + 4(\Omega^2 + K^2 \left(\frac{\gamma-1}{\gamma^2 \Omega^2} - 1 \right))}{\left((\nu + n)^2 - 4K^2 \right) \left((\nu + n)^2 - 2(\nu + n) + 4\Omega^4 \right)} X_{n-2}, \quad (3.20)$$

$X_n = 0$ pour n impaire

On peut déterminée tous les ν par la condition le coefficient à l'ordre zéro égale à 0 et cela donne :

$$\nu_{1,2} = \pm 2K, \quad (3.21)$$

$$\nu_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1 - 4\Omega^2}, \quad (3.22)$$

Et pour u_z on a ,de même que u_x , on utilise aussi la série de Frobenius $u_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n \xi^{n+\nu}$.

$$u'_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n + \nu) Z_n \xi^{n+\nu-1}, \quad (3.23)$$

$$u''_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n + \nu - 1) Z_n \xi^{n+\nu-2}, \quad (3.24)$$

$$u'''_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n + \nu - 2) Z_n \xi^{n+\nu-3}, \quad (3.25)$$

$$u''''_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n + \nu - 3) Z_n \xi^{n+\nu-4}, \quad (3.26)$$

Pour déterminer u_z on utilise la série de Frobenius on substitut u_z , u_x et ses dérivés dans l'équation (3.12) (3.13) et on identifie les terme de même puissance on trouve (Abdelatif,1990,[16]) :

$Z_0 = 0$ pour $n < -2$

$$Z_{-2} = \frac{i\Omega^2 (\nu^2 - 4K^2) X_0}{K(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{\gamma} - 1)}, \quad (3.27)$$

$Z_{-1} = 0$, et pour $n \geq 0$

$$Z_n = -\frac{2iK \left(2\frac{\gamma-1}{\gamma} + (n + \nu) \right)}{(n + \nu)^2 + 2(n + \nu) + 4\Omega^2} X_n, \quad (3.28)$$

Dans les équations précédentes on remarque que les coefficients X_n et Z_n peuvent être exprimés en terme de X_0 . nous prenons X_0 égale l'unité et multiplions la série entière par un facteur d'amplitude : de sorte que la composante de vitesse horizontale et verticale peut s'écrire comme suit :

$$u_x = A \sum_{n=0}^{\infty} X_{2n} \xi^{2n+\nu}, \quad (3.29)$$

$$u_z = A \sum_{n=-1}^{\infty} Z_{2n} \xi^{2n+\nu}, \quad (3.30)$$

Ces deux composantes de la vitesse u_x et u_z sont une combinaison linéaire des deux séries précédentes, pour les différents indices $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$ et sont égaux à :

$$u_x = A_1 \sum_{n=0}^{\infty} X_{2n}^1 \xi^{2n+\nu} + A_2 \sum_{n=0}^{\infty} X_{2n}^2 \xi^{2n+\nu} + A_3 \sum_{n=0}^{\infty} X_{2n}^3 \xi^{2n+\nu} + A_4 \sum_{n=0}^{\infty} X_{2n}^4 \xi^{2n+\nu_4}, \quad (3.31)$$

$$u_z = A_1 \sum_{n=-1}^{\infty} Z_{2n}^1 \xi^{2n+\nu} + A_2 \sum_{n=-1}^{\infty} Z_{2n}^2 \xi^{2n+\nu} + A_3 \sum_{n=-1}^{\infty} Z_{2n}^3 \xi^{2n+\nu} + A_4 \sum_{n=-1}^{\infty} Z_{2n}^4 \xi^{2n+\nu_4}, \quad (3.32)$$

Et sous une forme plus compacte, ces deux équations peuvent être écrites comme suit :

$$u_x(\xi) = \sum_{i=1}^4 A_i S^i(\xi), \quad (3.33)$$

$$u_z(\xi) = \sum_{i=1}^4 A_i R^i(\xi), \quad (3.34)$$

$$\text{Ou } S^i(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} X_{2n}^i \xi^{2n+\nu_i} \text{ et } R^i(\xi) = \sum_{n=-1}^{\infty} Z_{2n}^i \xi^{2n+\nu_i},$$

Étant donné les expressions des composantes de vitesse, nous appliquons les conditions aux deux composantes de vitesse à $z = 0$ et $z = L$ qui correspond en terme de ξ à $\xi_1 = \frac{2\Omega}{\beta}$ et $\xi_2 = \frac{2\Omega}{\beta} \exp\left(-\frac{L}{2H}\right)$ (3.1) les vitesses aux limites sont nulles comme décrit précédemment dans le modèle isotherme on a :

$$u_x(\xi_1) = 0, u_x(\xi_2) = 0, u_z(\xi_1) = 0, u_z(\xi_2) = 0, \quad (3.35)$$

On remplace on trouve le système de quatre équations :

$$\begin{aligned} A_1 S^1(\xi_1) + A_2 S^2(\xi_1) + A_3 S^3(\xi_1) + A_4 S^4(\xi_1) &= 0 \\ A_1 S^1(\xi_2) + A_2 S^2(\xi_2) + A_3 S^3(\xi_2) + A_4 S^4(\xi_2) &= 0 \\ A_1 R^1(\xi_1) + A_2 R^2(\xi_1) + A_3 R^3(\xi_1) + A_4 R^4(\xi_1) &= 0 \\ A_1 R^1(\xi_2) + A_2 R^2(\xi_2) + A_3 R^3(\xi_2) + A_4 R^4(\xi_2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Ou bien sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} S_1^1 & S_1^2 & S_1^3 & S_1^4 \\ S_2^1 & S_2^2 & S_2^3 & S_2^4 \\ R_1^1 & R_1^2 & R_1^3 & R_1^4 \\ R_2^1 & R_2^2 & R_2^3 & R_2^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = [M][A] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

Pour que ce système ait une solution, le déterminant de la matrice $[M]$ doit s'annuler, on a une solution triviale où tous les A sont nuls. pour les autres solutions on assignant des valeurs des paramètres β, d , on obtient tous les couple de (K, Ω) qui annule le déterminant $[M]$ et donc les modes propres de notre cavité. On traçant Ω en fonction de K figure suivante (3.2). Courbe en plein noir .

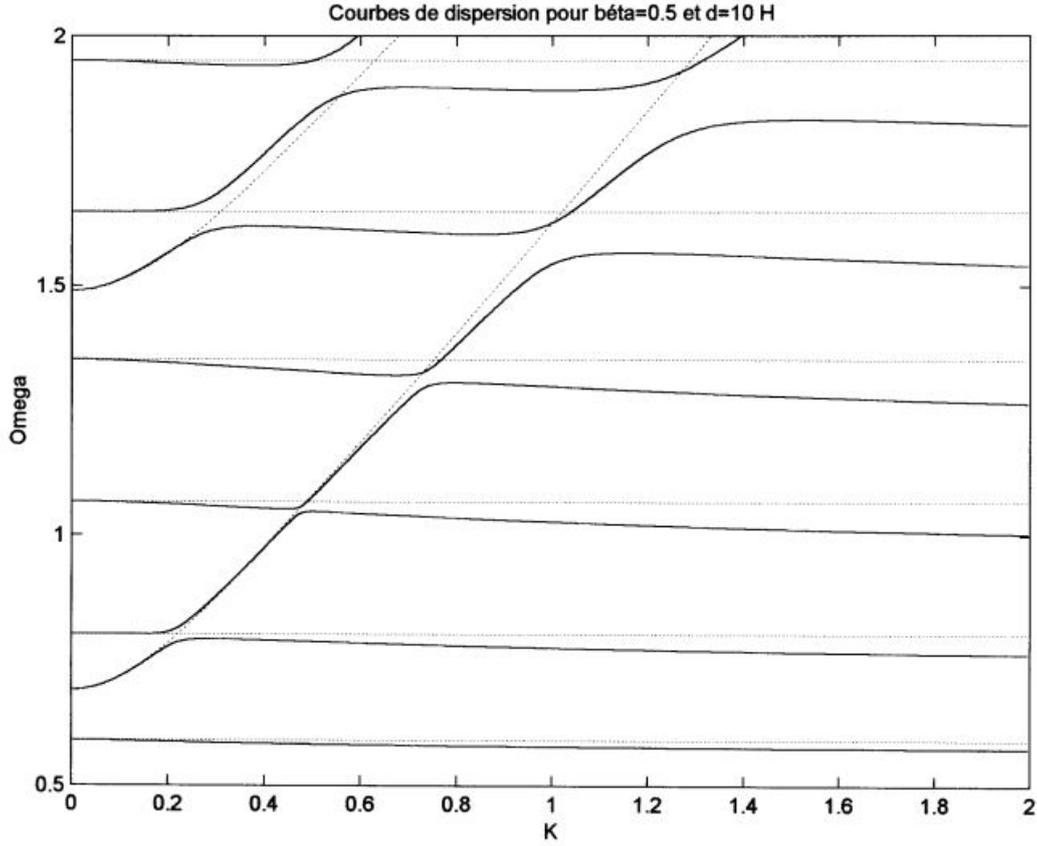


FIGURE 3.2 – Courbe de dispersion pour les ondes Fast et slow couplées et découplées pour un $\beta = 0.5$ et $L = 10H$ (abdelatif ,1990,[16])

3.2.2 Ondes magnéto-atmosphérique Slow et Fast découplées

D'après les équations (3.12) (3.13) on remarque que chaque équation dépend de u_x et u_z cette fois on va résoudre ces équations dans le cas où le couplage est très faible ($K \ll 1$) [16].

alors les équations deviennent :

$$\left((\Omega^2 - K^2)\xi^2 - 4\Omega^2 K^2 + \Omega^2 \xi \frac{d}{d\xi} + \Omega^2 \xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \right) u_x = 0, \quad (3.38)$$

$$\left(\Omega^2 + \frac{3}{4}\xi \frac{d}{d\xi} + \frac{1}{4}\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \right) u_z = 0, \quad (3.39)$$

— La première équation peut être résolue par la méthode de Frobenius une solution sous la forme de une série :

$$u_x = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \xi^{n+\mu}, \quad (3.40)$$

On remplace (3.40) et ses dérivés dans (3.38) avec la condition de F_0 différent de 0 et après l'identification on trouve :

$$\mu_{1,2} = \pm 2K, \quad (3.41)$$

et pour n paire

$$F_n = -\frac{\Omega^2 - K^2}{\Omega^2 \left((n + \mu)^2 - 4K^2 \right)} F_{n-2}, \quad (3.42)$$

$F_n = 0$ pour n impaire

Cette équation est équivalente à (Scheuer,Thomas,1981,[10])

$$u_x = AJ_{2k} \left(\frac{\sqrt{\Omega^2 - K^2}}{\Omega} \xi \right) + BY_{2k} \left(\frac{\sqrt{\Omega^2 - K^2}}{\Omega} \xi \right), \quad (3.43)$$

Cette équation décrit les mode Fast découplé dans un atmosphère isotherme stratifiée .

On applique les conditions au limites $u_x(\xi_1) = 0$ et $u_x(\xi_2) = 0$,

Ce qui revient à :

$$u_x(\xi_1) = AJ_{2k} \left(\frac{\sqrt{\Omega^2 - K^2}}{\Omega} \xi_1 \right) + BY_{2k} \left(\frac{\sqrt{\Omega^2 - K^2}}{\Omega} \xi_1 \right) = 0, \quad (3.44)$$

$$u_x(\xi_2) = AJ_{2k} \left(\frac{\sqrt{\Omega^2 - K^2}}{\Omega} \xi_2 \right) + BY_{2k} \left(\frac{\sqrt{\Omega^2 - K^2}}{\Omega} \xi_2 \right) = 0, \quad (3.45)$$

En notation matricielle

$$\begin{pmatrix} J_{2k} \left(\frac{\sqrt{\Omega^2 - K^2}}{\Omega} \xi_1 \right) & Y_{2k} \left(\frac{\sqrt{\Omega^2 - K^2}}{\Omega} \xi_1 \right) \\ J_{2k} \left(\frac{\sqrt{\Omega^2 - K^2}}{\Omega} \xi_2 \right) & Y_{2k} \left(\frac{\sqrt{\Omega^2 - K^2}}{\Omega} \xi_2 \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

Le déterminant est ;

$$J_{2k} \left(\frac{\sqrt{\Omega^2 - K^2}}{\Omega} \xi_1 \right) Y_{2k} \left(\frac{\sqrt{\Omega^2 - K^2}}{\Omega} \xi_2 \right) - Y_{2k} \left(\frac{\sqrt{\Omega^2 - K^2}}{\Omega} \xi_1 \right) J_{2k} \left(\frac{\sqrt{\Omega^2 - K^2}}{\Omega} \xi_2 \right) = 0, \quad (3.47)$$

Comme on a fait précédemment on trouve tous les coupe de Ω et K qui annule le déterminant ces résultat sont représenté sur la figure (3.2) les courbes en pointée strictement croissant représente les modes fast découplées.

— La deuxième équation (3.39) admis une solution simple de la forme

$$u_z = C\xi^\alpha. \quad (3.48)$$

On remplace cette solution (3.48) dans l'équation (3.39) on trouve : $\alpha_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 4\Omega^2}$,
 $u_z = C\xi^{\alpha_1} + D\xi^{\alpha_2}$.

Cette équation décrit les mode Slow découplé dans un atmosphère isotherme stratifiée

On applique les condition au limites de nouveau : $u_z(\xi_1) = 0$ et $u_z(\xi_2) = 0$ en $\xi_1 = \frac{2\Omega}{\beta}$ et $\xi_2 = \frac{2\Omega}{\beta} \exp\left(-\frac{L}{2H}\right)$ ce qui donne ;

$$\begin{pmatrix} \xi_1^{\alpha_1} & \xi_1^{\alpha_2} \\ \xi_2^{\alpha_1} & \xi_2^{\alpha_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

Le déterminant est ;

$$\xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} - \xi_1^{\alpha_2} \xi_2^{\alpha_1} = 0, \quad (3.50)$$

On a $\alpha_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{4\Omega^2 - 1} = -1 \pm i\theta$ où $\theta = \sqrt{4\Omega^2 - 1}$ donc l'équation (3.50) peut s'écrire comme

$$\xi_1^{i\theta} \xi_2^{-i\theta} - \xi_1^{-i\theta} \xi_2^{i\theta} = 0, \quad (3.51)$$

$$\xi_1^{2i\theta} \xi_2^{-2i\theta} - 1 = 0, \quad (3.52)$$

$$\left(\frac{\xi_1}{\xi_2} \right)^{2i\theta} = 1, \quad (3.53)$$

On pose $\frac{\xi_1}{\xi_2} = \exp(\psi)$ alors $\exp(2i\psi\theta) = 1$

$$\cos(2\psi\theta) + i\sin(2\psi\theta) = 1 \implies \cos(2\psi\theta) = 1, \quad (3.54)$$

On remplace par θ et ψ on trouve

$$\Omega = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{2n\pi H}{d}\right)^2}{4}}. \quad (3.55)$$

Où $d = 10H$ et $n = 1, 2, 3, \dots$

On trouve tous les Ω pour les différents n ces résultats sont représentés sur la figure (3.2) les courbes en pointée constante représentent les modes slow découplés.

3.2.3 Les modes d'Alfvén

L'équation (3.9) régit la propagation des ondes d'Alfvén qui est découplée aux autres équations Fast et Slow (3.8) (3.10)

$$\left(\omega^2 + V_A^2 \frac{d^2}{dz^2} \right) u_y = 0, \quad (3.56)$$

On introduit aussi les paramètres précédents adimensionnels :

$K = K_x H$: le vecteur d'onde adimensionnel

$\Omega = \frac{\omega H}{c}$: pulsation adimensionnelle

$\xi = \frac{2\omega H}{V_A}$,

Alors cette équation devient :

$$\left(\xi^2 + \xi \frac{d}{d\xi} + \xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \right) u_y = 0, \quad (3.57)$$

Cette équation différentielle de Bessel admet une solution sous la forme de :

$$u_y(\xi) = AJ_0(\xi) + BY_0(\xi), \quad (3.58)$$

On applique les mêmes conditions aux limites que précédemment $u_z(\xi_1) = 0$ et $u_z(\xi_2) = 0$ en $\xi_1 = \frac{2\Omega}{\beta}$ et $\xi_2 = \frac{2\Omega}{\beta} \exp\left(-\frac{L}{2H}\right)$ on obtient ;

$$\begin{pmatrix} J_0(\xi_1) & Y_0(\xi_1) \\ J_0(\xi_2) & Y_0(\xi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

Le système a une solution lorsque le déterminant est nul

$$J_0(\xi_1) Y_0(\xi_2) - Y_0(\xi_1) J_0(\xi_2) = 0. \quad (3.60)$$

On trace les Ω qui annule le déterminant en fonction de β la figure (3.3) .

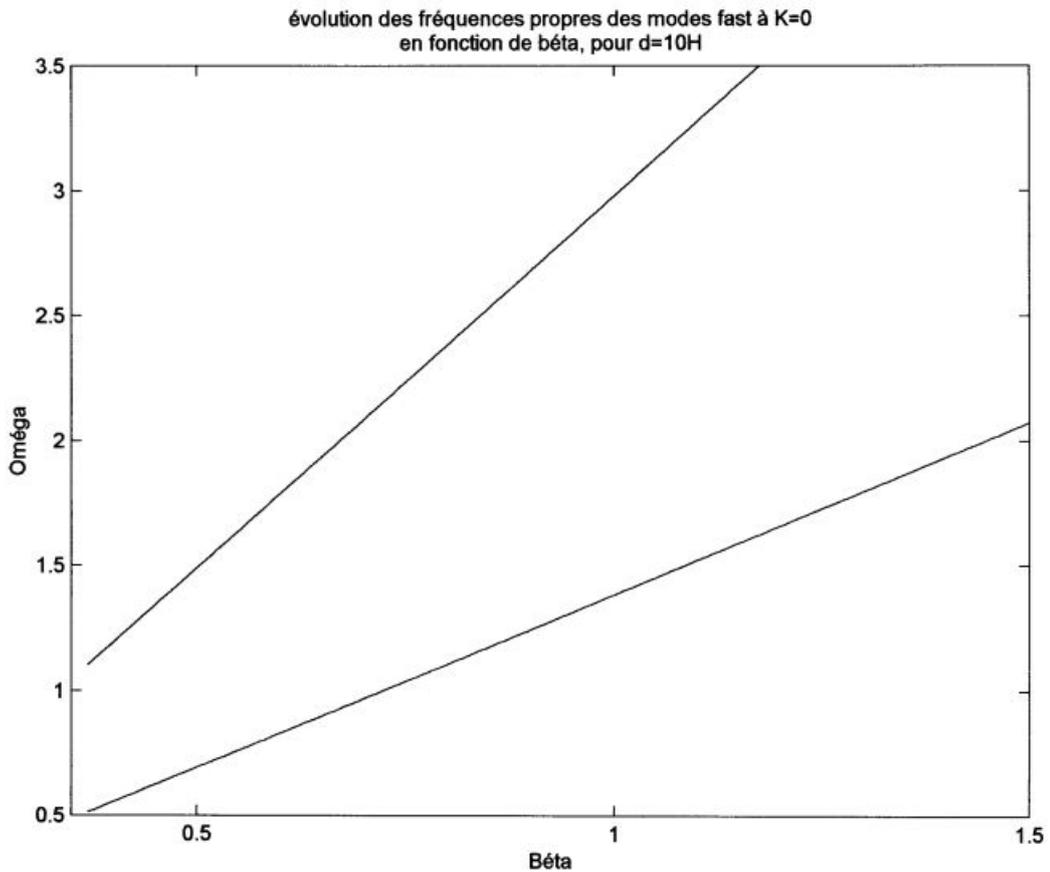


FIGURE 3.3 – la courbe des omégas en fonction de Béta

3.3 Discussion

La courbe de dispersion des ondes magnéto-atmosphérique (3.2) est obtenues en traçant tous les Ω qui annule les déterminants pour $\beta = 0.5$ et $z_1 = 0$ et $z = L = 10H$.

- Les courbe en plein noir correspondent aux solutions de système (3.37) représente les modes magnéto-atmosphériques couplés.

- Les courbe en pointée croissante correspondent aux solutions de système (3.46) représente les modes magnéto-atmosphériques fast découplées.
- Les courbe en pointée horizontal correspondent aux solutions de système (3.50) représente les modes magnéto-atmosphériques slow découplées.

Lorsqu'on examine les courbes des ondes magnéto-atmosphériques couplée, on remarque qu'elles constituées de deux types de segments, les une sont relatifs à des modes fast, semblable aux modes fast découplés et les autres segments semblable à des modes slow découplée.

Contrairement aux modes slow et fast découplés, les courbe des modes couplée évitent le croisement et change de nature de fast vers slow ou de slow vers fast , ça veut dire que les modes couplé l'une sais l'existence de L'autre ondes a cause de terme de couplage des ondes magnéto-atmosphériques fast et slow.

Lorsque on compare les courbes des modes couplée avec les courbes des modes découplée, on remarque qu'elles sont identiques pour les petites valeurs de K , mais elles divergent aux croisement des deux modes fast et Slow découplée. ainsi le fait que les courbes des modes couplés évitent le croisement, pour les petites valeurs de K , est du aux termes de couplage des équation fast et slow.

La courbe (3.3) correspond au solution de système (4.1) qui décrit les mode d'alfven , cette figure montre que ces courbes dépend de la vitesse d'alfven.

Il est utile a noter que cette figure représente aussi la variation des fréquences des modes fast découplée lorsque le K en fonction de β .elle montre que ces courbes dépend de la vitesse d'alfven.

Chapitre 4

Ondes magnéto-atmosphériques dans le cas d'un champ magnétique incliné

Dans ce chapitre on va résoudre les équations d'ondes magnéto-atmosphériques dans le même modèle décrit précédemment (isotherme et stratifiée), mais dans le cas d'un champ magnétique légèrement incliné pour une valeur nulle de nombre d'onde $K = 0$. On va utiliser la méthode des perturbations pour des petites inclinaisons du champ magnétique par la suite on linéarise les équations pour pouvoir les résoudre et trouver la variation des modes propre en fonction de θ .

4.1 Equations des ondes magnéto-atmosphérique dans un champ magnétique incliné

A partir de l'équation (2.40) les équations des onde magnéto-atmosphériques dans un champ magnétique incliné sont ([18]) :

$$\begin{aligned} & \left(\omega^2 - (c^2 + v_{Az}^2) K_x^2 + v_{Az}^2 \frac{d^2}{dz^2} \right) u_x \\ & + \left(\left(\frac{ic^2}{\gamma H} + v_{Ax} v_{Az} K_x \right) K_x - ic^2 K_x \frac{d}{dz} - v_{Ax} v_{Az} \frac{d^2}{dz^2} \right) u_z = 0 \end{aligned} \quad , \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{ic^2}{\gamma H} (\gamma - 1) + v_{Ax} v_{Az} K_x \right) K_x - ic^2 K_x \frac{d}{dz} - v_{Ax} v_{Az} \frac{d^2}{dz^2} \right] u_x \\ & + \left[\omega^2 - v_{Ax}^2 K_x^2 - \frac{c^2}{H} \frac{d}{dz} + (c^2 + v_{Ax}^2) \frac{d^2}{dz^2} \right] u_z = 0 \end{aligned} \quad , \quad (4.2)$$

Avec $v_A^2 = \frac{B^2}{4\pi\rho}$ $v_{Ax}^2 = \frac{B_x^2}{4\pi\rho}$ et $v_{Az}^2 = \frac{B_z^2}{4\pi\rho}$,

4.2 Equations des ondes magnéto-atmosphérique dans un champ magnétique incliné pour un $k_x = 0$

On prend $K_x = 0$ dans les équations (4.1) (4.2) on trouve :

$$\left(\omega^2 + v_{Az}^2 \frac{d^2}{dz^2}\right) u_x - \left(v_{Ax} v_{Az} \frac{d^2}{dz^2}\right) u_z = 0, \quad (4.3)$$

$$\left(-v_{Ax} v_{Az} \frac{d^2}{dz^2}\right) u_x + \left(\omega^2 - \frac{c^2}{H} \frac{d}{dz} + (c^2 + v_{Ax}^2) \frac{d^2}{dz^2}\right) u_z = 0, \quad (4.4)$$

On fait les approximation suivante pour θ petit :

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \theta + \epsilon(\theta) && \simeq \theta \\ v_{Ax} &= v_A \sin\theta && \simeq v_A \theta \\ \cos\theta &= 1 - \theta^2 + \epsilon(\theta) && \simeq 1 \\ v_{Az} &= v_A \cos\theta && \simeq v_A, \\ \sin\theta \cos\theta &= \frac{1}{2} \sin(2\theta) && \simeq \theta \\ v_{Ax} v_{Az} &= v_A^2 \sin\theta \cos\theta = v_A^2 \frac{1}{2} \sin(2\theta) && \simeq v_A^2 \theta \end{aligned} \quad (4.5)$$

On substitue (4.5) dans les équations (4.3) (4.4)

$$\left(\omega^2 + v_A^2 \frac{d^2}{dz^2}\right) u_x - \left(v_A^2 \theta \frac{d^2}{dz^2}\right) u_z = 0, \quad (4.6)$$

$$- \left(v_A^2 \theta \frac{d^2}{dz^2}\right) u_x + \left(\omega^2 - \frac{c^2}{H} \frac{d}{dz} + c^2 \frac{d^2}{dz^2}\right) u_z = 0, \quad (4.7)$$

4.3 Equations où le champ magnétique est uniforme

Lorsque on prend $\theta = 0$ dans ces équations on trouve les équation de champ magnétique uniforme B_0 avec $K = 0$ (3.8) (3.10) :

$$\left(\omega^2 + v_A^2 \frac{d^2}{dz^2}\right) u_x = L_1 u_x = 0, \quad (4.8)$$

$$\left(\omega^2 - \frac{c^2}{H} \frac{d}{dz} + c^2 \frac{d^2}{dz^2}\right) u_z = L_4 u_z = 0, \quad (4.9)$$

Alors (4.6) (4.7) deviennent :

$$\begin{aligned} L_1 u_x - L_2 u_z &= 0 \\ -L_3 u_x + L_4 u_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Avec $L_1 = \left(\omega^2 + v_A^2 \frac{d^2}{dz^2}\right)$, $L_2 = \left(v_A^2 \theta \frac{d^2}{dz^2}\right)$, $L_3 = \left(v_A^2 \theta \frac{d^2}{dz^2}\right)$ $L_4 = \left(\omega^2 - \frac{c^2}{H} \frac{d}{dz} + c^2 \frac{d^2}{dz^2}\right)$.

4.4 La méthode perturbative

On cherche les solutions de ce système d'équations différentielle par la méthode de perturbation on mit des solutions sous la forme de :

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x0} + \theta u_{x1} \\ u_z &= u_{z0} + \theta u_{z1} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Où u_{x0} et u_{z0} correspond aux solutions lorsque l'angle θ est nul c'est à dire dans un champ magnétique B_0 uniforme suivant z on les a déterminé dans le chapitre précédent, et u_{x1} et u_{z1} sont les vitesses de la petite perturbation due où θ non nul . On remplace (4.11) dans (4.10)

$$\begin{aligned} L_1 (u_{x0} + \theta u_{x1}) - L_2 (u_{z0} + \theta u_{z1}) &= 0 \\ -L_3 (u_{x0} + \theta u_{x1}) + L_4 (u_{z0} + \theta u_{z1}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} L_1 u_{x0} + L_1 \theta u_{x1} - L_2 u_{z0} - L_2 \theta u_{z1} &= 0 \\ -L_3 u_{x0} + -L_3 \theta u_{x1} + L_4 u_{z0} + L_4 \theta u_{z1} &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

On a d'après les équations (4.8) et (4.9) de θ nul, $L_1 u_{x0} = L_4 u_{z0} = 0$, tel que l'indice (0) indique les solutions pour lesquelles le champ magnétique B_0 est uniforme et vertical

$$\begin{aligned} L_1 \theta u_{x1} - L_2 u_{z0} - L_2 \theta u_{z1} &= 0 \\ -L_3 u_{x0} - L_3 \theta u_{x1} + L_4 \theta u_{z1} &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.5 La linéarisation

La linéarisation consiste à négliger les termes petit où on a des θ carrées comme on a fait avec l'équation d'onde (2.39) alors on néglige les termes de θ^2 on trouve :

$$\begin{aligned} L_1 \theta u_{x1} - L_2 u_{z0} &= 0 \\ -L_3 u_{x0} + L_4 \theta u_{z1} &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Donc on remplace L_1 , L_2 , L_3 et L_4 par leurs expressions on a :

$$\left(\omega^2 + v_A^2 \frac{d^2}{dz^2}\right) u_{x1} = \left(v_A^2 \frac{d^2}{dz^2}\right) u_{z0}, \quad (4.16)$$

$$\left(\omega^2 - \frac{c^2}{H} \frac{d}{dz} + c^2 \frac{d^2}{dz^2}\right) u_{z1} = \left(v_A^2 \frac{d^2}{dz^2}\right) u_{x0}, \quad (4.17)$$

A ce stade on fait un changement de variable similaire aux équations de chapitre précédent par ce que les solution de u_{z0} et u_{x0} on les a déterminé en fonction de ξ

$$\xi = \frac{2\omega H}{V_A} = \frac{2\Omega}{\beta} \exp(-z/2H), \quad (4.18)$$

Afin d'obtenir des équations adimensionnelles on introduit aussi les paramètres suivants :

$K = K_x H$: le vecteur d'onde adimensionnel

$\Omega = \frac{\omega H}{c}$: pulsation adimensionnelle

On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} &= -\frac{\xi}{2H} \frac{d}{d\xi} \\ \frac{d^2}{dz^2} &= \frac{\xi}{4H^2} \frac{d}{d\xi} + \frac{\xi^2}{4H^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

On remplace (4.19) dans (4.16) on trouve après la simplification :

$$\left[\xi^2 + \xi \frac{d}{d\xi} + \xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \right] u_{x1} = \left[\xi \frac{d}{d\xi} + \xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \right] u_{z0}, \quad (4.20)$$

On remplace aussi (4.19) dans (4.17) et on trouve également :

$$\left[\Omega^2 + \frac{3\xi}{4} \frac{d}{d\xi} + \frac{\xi^2}{4} \frac{d^2}{d\xi^2} \right] u_{z1} = \left[\frac{\Omega^2}{\xi} \frac{d}{d\xi} + \Omega^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \right] u_{x0}. \quad (4.21)$$

Les expression de u_{z0} et u_{x0} sont calculées dans le chapitre précédent alors.

$$\begin{aligned} u_{x0} &= A J_0(\xi) + B Y_0(\xi) \\ u_{z0} &= C \xi^{\alpha_1} + D \xi^{\alpha_2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Avec $\alpha_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{4\Omega^2 - 1}$ on remplace et on dérive on obtient :

$$\left[\xi^2 + \xi \frac{d}{d\xi} + \xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \right] u_{x1} = \alpha_1^2 C \xi^{\alpha_1} + \alpha_2^2 D \xi^{\alpha_2}. \quad (4.23)$$

$$\left[\Omega^2 + \frac{3\xi}{4} \frac{d}{d\xi} + \frac{\xi^2}{4} \frac{d^2}{d\xi^2} \right] u_{z1} = -A \Omega^2 J_0(\xi) - B \Omega^2 Y_0(\xi). \quad (4.24)$$

4.6 Résolution des équations différentielles

Vue que ces deux équations différentielles sont très compliquées à résoudre à la main on les a résolues par le logiciel mathematica et on trouve u_{x1} et u_{z1} .

et de coup on déduit u_x et u_z par (4.11) respectivement :

$$\begin{aligned}
 \text{Out[16]} = & A(1+\theta) \text{BesselJ}[0, \xi] + B(1+\theta) \text{BesselY}[0, \xi] + \\
 & \frac{1}{2} D\pi\theta \xi^{-1-i\sqrt{-1+4\Omega^2}} \left(\left(1+i\sqrt{-1+4\Omega^2} \right) \text{BesselJ}[0, \xi] \text{BesselY}[0, \xi] \text{HypergeometricPFQ}\left[\{1\}, \right. \right. \\
 & \left. \left. \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{-1+4\Omega^2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{-1+4\Omega^2} \right\}, -\frac{\xi^2}{4} \right] - \xi \text{BesselJ}[0, \xi] \text{BesselY}[1, \xi] \right. \\
 & \left. \text{HypergeometricPFQ}\left[\{1\}, \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{-1+4\Omega^2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{-1+4\Omega^2} \right\}, -\frac{\xi^2}{4} \right] + \left(-1 - i\sqrt{-1+4\Omega^2} \right) \right. \\
 & \left. \text{BesselY}[0, \xi] \text{HypergeometricPFQ}\left[\left\{ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{-1+4\Omega^2} \right\}, \left\{ 1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{-1+4\Omega^2} \right\}, -\frac{\xi^2}{4} \right] \right) + \\
 & \frac{1}{2} C\pi\theta \xi^{-1+i\sqrt{-1+4\Omega^2}} \left(\text{BesselJ}[0, \xi] \left(\left(1-i\sqrt{-1+4\Omega^2} \right) \text{BesselY}[0, \xi] \right. \right. \\
 & \left. \left. \text{HypergeometricPFQ}\left[\{1\}, \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{-1+4\Omega^2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{-1+4\Omega^2} \right\}, -\frac{\xi^2}{4} \right] - \xi \text{BesselY}[1, \xi] \right. \right. \\
 & \left. \left. \text{HypergeometricPFQ}\left[\{1\}, \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{-1+4\Omega^2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{-1+4\Omega^2} \right\}, -\frac{\xi^2}{4} \right] \right) + i \left(i + \sqrt{-1+4\Omega^2} \right) \right. \\
 & \left. \text{BesselY}[0, \xi] \text{HypergeometricPFQ}\left[\left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{-1+4\Omega^2} \right\}, \left\{ 1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{-1+4\Omega^2} \right\}, -\frac{\xi^2}{4} \right] \right)
 \end{aligned}$$

Avec $\alpha = \sqrt{-1+4\Omega^2}$

$$\begin{aligned}
 u_x = & A(1+\theta) J_0(\xi) + B(1+\theta) Y_0(\xi) + \frac{1}{2} D\pi\theta \xi^{-1-i\alpha} \left(J_0(\xi) \left((1+i\alpha) \right. \right. \\
 & \left. \left. Y_0(\xi) \text{hypergeometricPFQ} \left(1, \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\alpha, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\alpha \right\}, -\frac{\xi^2}{4} \right) - \right. \\
 & \left. \xi J_1(\xi) \text{hypergeometricPFQ} \left(1, \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\alpha, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\alpha \right\}, -\frac{\xi^2}{4} \right) + (-1-i\alpha) \right. \\
 & \left. Y_0(\xi) \right) \text{hypergeometricPFQ} \left(\left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\alpha \right], \left[1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\alpha \right], -\frac{\xi^2}{4} \right) + \quad (4.25) \\
 & \frac{1}{2} C\pi\theta \xi^{-1+i\alpha} \left(J_0(\xi) \left((1-i\alpha) Y_0(\xi) \text{hypergeometricPFQ} \left(1, \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\alpha, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\alpha \right], -\frac{\xi^2}{4} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \xi J_1(\xi) \text{hypergeometricPFQ} \left(1, \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\alpha, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\alpha \right], -\frac{\xi^2}{4} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. i(i+i\alpha) Y_0(\xi) \right) \text{hypergeometricPFQ} \left(\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\alpha \right], \left[1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\alpha \right], -\frac{\xi^2}{4} \right) \right)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \text{Out[17]} = & C(1+\theta)\xi^{-1-\sqrt{1-4\Omega^2}} + D(1+\theta)\xi^{-1+\sqrt{1-4\Omega^2}} + \frac{1}{4\Omega^2\sqrt{1-4\Omega^2}} \\
 B\theta & \left(-2\Omega^2 \left(1 + \sqrt{1-4\Omega^2} \right) \text{BesselY}[0, \xi] \text{HypergeometricPFQ}\left[\{1\}, \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4\Omega^2}, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4\Omega^2}\right\}, \right. \right. \\
 & \left. \left. -\frac{\xi^2}{4}\right] - \xi \left(1 - 2\Omega^2 + \sqrt{1-4\Omega^2} \right) \text{BesselY}[1, \xi] \text{HypergeometricPFQ}\left[\{1\}, \right. \right. \\
 & \left. \left. \left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4\Omega^2}, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4\Omega^2}\right\}, -\frac{\xi^2}{4}\right] - 2\Omega^2 \left(-1 + \sqrt{1-4\Omega^2} \right) \text{BesselY}[0, \xi] \right. \\
 & \left. \text{HypergeometricPFQ}\left[\{1\}, \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4\Omega^2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4\Omega^2}\right\}, -\frac{\xi^2}{4}\right] - \xi \left(-1 + 2\Omega^2 + \sqrt{1-4\Omega^2} \right) \right. \\
 & \left. \text{BesselY}[1, \xi] \text{HypergeometricPFQ}\left[\{1\}, \left\{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4\Omega^2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4\Omega^2}\right\}, -\frac{\xi^2}{4}\right] \right) - \frac{1}{2\sqrt{1-4\Omega^2}} \\
 A\theta & \left(\left(1 + \sqrt{1-4\Omega^2} \right) \text{HypergeometricPFQ}\left[\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4\Omega^2}\right\}, \left\{1, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4\Omega^2}\right\}, -\frac{\xi^2}{4}\right] + \right. \\
 & \left. \left(-1 + \sqrt{1-4\Omega^2} \right) \text{HypergeometricPFQ}\left[\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4\Omega^2}\right\}, \left\{1, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4\Omega^2}\right\}, -\frac{\xi^2}{4}\right] \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_z = & C(1+\theta)\xi^{-1-i\alpha} + D(1+\theta)\xi^{-1+i\alpha} + \frac{1}{4\Omega^2\alpha} + B\theta(-2\Omega^2(1+\alpha)Y_0(\xi) \\
 & \text{hypergeometricPFQ}\left(1, \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha\right\}, -\frac{\xi^2}{4}\right) - \xi(1-2\Omega^2+\alpha)Y_1(\xi) \\
 & \text{hypergeometricPFQ}\left(1, \left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha\right\}, -\frac{\xi^2}{4}\right) - 2\Omega^2(-1+\alpha)Y_0(\xi) \\
 & \text{hypergeometricPFQ}\left(1, \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\alpha\right\}, -\frac{\xi^2}{4}\right) - \xi(-1+2\Omega^2+\alpha)Y_1(\xi) \tag{4.26} \\
 & \text{hypergeometricPFQ}\left(1, \left\{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\alpha, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\alpha\right\}, -\frac{\xi^2}{4}\right) - \frac{1}{2\alpha} \\
 & A\theta((1+\alpha)\text{hypergeometricPFQ}\left(\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha\right\}, \left\{1, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha\right\}, -\frac{\xi^2}{4}\right) \\
 & (-1+\alpha)\text{hypergeometricPFQ}\left(\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha\right\}, \left\{1, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\alpha\right\}, -\frac{\xi^2}{4}\right))
 \end{aligned}$$

Maintenant on applique les conditions aux deux composantes de vitesse à $z = 0$ et $z = L$ qui correspond en terme de ξ à $\xi_1 = \frac{2\Omega}{\beta}$ et $\xi_2 = \frac{2\Omega}{\beta} \exp\left(-\frac{L}{2H}\right)$ figure (3.1) les vitesses aux limites sont nulles comme décrit précédemment modèle isotherme on a :

$$u_x(\xi_1) = 0, u_x(\xi_2) = 0, u_z(\xi_1) = 0, u_z(\xi_2) = 0 \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
 AS^1(\xi_1) + BS^2(\xi_1) + CS^3(\xi_1) + DS^4(\xi_1) &= 0 \\
 AS^1(\xi_2) + BS^2(\xi_2) + CS^3(\xi_2) + DS^4(\xi_2) &= 0 \\
 AR^1(\xi_1) + BR^2(\xi_1) + CR^3(\xi_1) + DR^4(\xi_1) &= 0 \\
 AR^1(\xi_2) + BR^2(\xi_2) + CR^3(\xi_2) + DR^4(\xi_2) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Où les S^i et R^i sont les coefficient des équations on peut écrire le système (4.28) sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} S_1^1 & S_1^2 & S_1^3 & S_1^4 \\ S_2^1 & S_2^2 & S_2^3 & S_2^4 \\ R_1^1 & R_1^2 & R_1^3 & R_1^4 \\ R_2^1 & R_2^2 & R_2^3 & R_2^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = [M][A] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Pour que ce système ait une solution, le déterminant de la matrice $[M]$ doit s'annuler, le déterminant on le calcule par le logiciel mathematica et on trouve tout les couple qui annule le déterminant et on trace Ω en fonction de θ la courbe suivante,

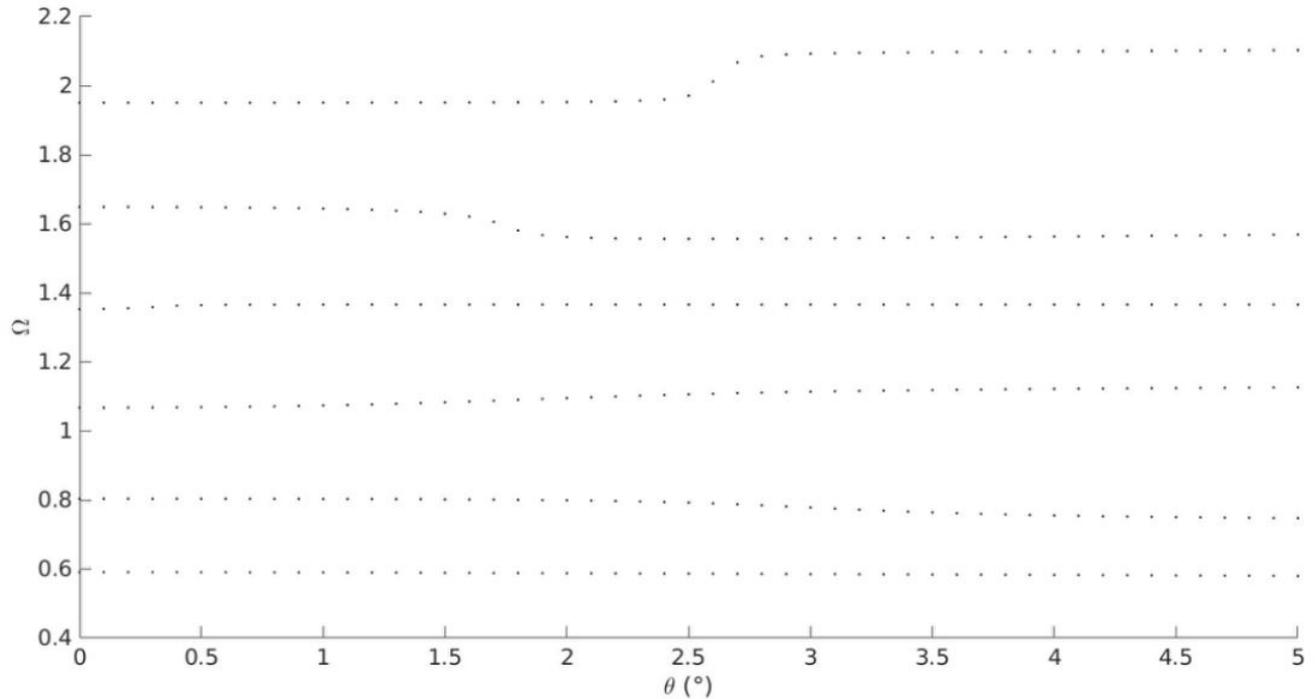


FIGURE 4.1 – Courbe des fréquences en fonction de l'inclinaison de champ magnétique θ pour un $\beta = 1$ et $L = 10H$

4.7 Discussion

La courbe des ondes magnéto-atmosphériques est obtenues en traçant tous les Ω qui annule le déterminant pour angle θ varie de 0° à 5° $\beta = 1$ et $z_1 = 0$ et $z_2 = L = 10H$.

on remarque à partir de la courbe que les fréquences varie en fonction de l'angle d'inclinaison de champ magnétique a cause de couplage entre les modes fast et slow d'ondes magnéto-atmosphérique

Conclusion

Le mémoire de fin d'étude qu'on vient de terminer est fructueux, on a appris beaucoup de choses dans ce travail tels que, la recherche bibliographique et le développement de nouveaux calculs mathématiques (linéarisation, calcul des modes propres et méthodes perturbative). De plus on a atteint notre objectif principal qu'est la rédaction de notre travail scientifique.

Dans le premier chapitre on a fait une introduction générale sur le soleil et sa structure interne et externe. On a parler aussi de l'activité solaire et après on a introduit les différents oscillations de l'atmosphère solaire.

Le deuxième chapitre a comporté le développement mathématique, où on a établie l'équation d'ondes magnéto-atmosphérique à partir des équations fondamentales de la M.H.D en utilisant la linéarisation.

Dans le troisième chapitre on a présenté le modèle isotherme où on a considéré que la photosphère et la chromosphère, au niveau de l'ombre d'une tache solaire se comportent comme une cavité résonante. On a assumé que cette atmosphère est isotherme et stratifiée. Dans un tel milieu, les modes fast et slow peuvent interagir entre eux. Lorsque l'interaction des deux modes est très faible ils sont complètement découplés (loin des intersections des deux modes découplés). Dans ce cas ils se comportent comme des modes indépendants l'un de l'autre. Au contraire lorsque l'interaction des modes est maximale (pris des intersections des modes slow et fast découplées) le mode résultant n'est ni slow ni fast, mais une combinaison des deux, appelé aussi mode mixte. Celui-ci a un caractère fast dominant en bas de l'atmosphère et un caractère slow dominant dans le haut de l'atmosphère.

La dernière partie de cette initiation à la recherche et dans le quatrième chapitre, on a pu faire le même développement mathématique dans le même modèle que le chapitre précédent, où nous avons réécrit les équations d'ondes magnéto-atmosphériques dans un champ magnétique incliné pour un nombre d'onde $k = 0$ utilisant des petits angles de la méthode perturbative, et par la suite on a calculé les modes propres Ω en fonction de θ . On a pu remarqué que dans le cas de champ magnétique incliné les deux modes fast et slow sont couplées même pour un nombre d'onde nul $k = 0$, contrairement au cas où le champ magnétique est vertical où les deux modes sont découplés.

En fin, le résultat intéressant obtenue lors du travail et qu'il sera utile pour la suite pour le calcul des modes propres dans le cas ou le nombre d'onde k est non nul afin de tracer les différents modes d'oscillations. Cela dans le but ultime de comprendre la propagation d'ondes le long d'une boucle magnétique qui surplombe une tache solaire.

Bibliographie

- [1] Robert B Leighton, Robert W Noyes, and George W Simon. Velocity fields in the solar atmosphere. i. preliminary report. *The Astrophysical Journal*, 135 :474, 1962. 1.4.1
- [2] Roger K Ulrich. The five-minute oscillations on the solar surface. *The Astrophysical Journal*, 162 :993, 1970. 1.4.1
- [3] J Leibacher and RF Stein. Ap. letters, 7, 191.. 1975. *Physique des Mouvements dans les Atmospheres*, 1971. 1.4.1
- [4] Charles L Wolff. Free oscillations of the sun and their possible stimulation by solar flares. *The Astrophysical Journal*, 176 :833, 1972. 1.4.1
- [5] BW Lites. Photoelectric observations of chromospheric sunspot oscillations. iv-the ca ii h line and he i 10830 a. *The Astrophysical Journal*, 301 :1005–1017, 1986. 1.5
- [6] JM Beckers and RB Schultz. Oscillatory motions in sunspots. *Solar Physics*, 27(1) :61–70, 1972. 1.4.2.1
- [7] Toufik El-Hak Abdelatif. Umbral oscillations as a probe of sunspot structure. 1985. 1.4.2.1, 2.3.1
- [8] Toufik E Abdelatif, Bruce W Lites, and John H Thomas. The interaction of solar p-modes with a sunspot. i-observations. *The Astrophysical Journal*, 311 :1015–1024, 1986. 1.4.2.1
- [9] Toufik E Abdelatif and John H Thomas. The interaction of solar p-modes with a sunspot. ii-simple theoretical models. *The Astrophysical Journal*, 320 :884–892, 1987. 1.4.2.1
- [10] Mark A Scheuer and John H Thomas. Umbral oscillations as resonant modes of magneto-atmospheric waves. *Solar Physics*, 71(1) :21–38, 1981. 1.4.2.2, 1.4.2.2, 3.2.2
- [11] Yutaka Uchida and Takashi Sakurai. Oscillations in sunspot umbras due to trapped alfvén waves excited by overstability. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 27 :259–274, 1975. 1.4.2.2
- [12] John H Thomas and Mark A Scheuer. Umbral oscillations in a detailed model umbra. *Solar Physics*, 79(1) :19–29, 1982. 1.4.2.2
- [13] YD Zhugzhda, V Locans, and J Staude. Solar phys. 82, 369. *Google Scholar*, 1983. 1.4.2.2
- [14] Yu D Zhugzhda, J Staude, and V Locans. Solar phys. 91, 219. *Google Scholar*, 1984. 1.4.2.2
- [15] Thomas George Cowling. Magnetohydrodynamics. *Bristol, Adam Hilger, Ltd., 1976. 145 p.*, 1976. 2.1

- [16] Toufik E Abdelatif. Magneto-atmospheric waves. *Solar Physics*, 129(2) :201–219, 1990. 3.1, 3.1, 3.2.1, 3.2, 3.2.2
- [17] Schwartz St J and B Leroy. Propagation of waves in an atmosphere in the presence of a magnetic field. *Astron. Astrophys*, 112 :93–103, 1982. 3.2.1, 3.2.1
- [18] St J Schwartz and N Bel. Propagation of waves in an atmosphere in the presence of a magnetic field. vii-magneto-acoustic-gravity modes in an oblique b. *Astronomy and Astrophysics*, 137 :128–132, 1984. 4.1
- [19] Lotfi YELLES CHAUCHE. *Ondes Magneto-atmosphériques*. PhD thesis, 2015.
- [20] Massinissa Hadjara. Etude et mise en oeuvre des techniques temps-distance en heliosismologie. *arXiv preprint arXiv :1709.07074*, 2017.
- [21] Yasmina Boudierba. *Problème direct en héliosismologie temps-distance étude et interprétation théorique*. PhD thesis, 2010.